ORSAY
n° d'ordre : 3124

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3 eme cycle

MATHEMATIQUES STATISTIQUES

PAR

Mademoiselle LAREDO Catherine

SUJET : QUELQUES ETUDES ASYMPTOTIQUES EN DYNAMIQUE DE POPULATIONS

soutenue le 14 décembre 1981 devant la Commission d'examen

MM. DACUNHA-CASTELLE Président

RUGET

TOMASSONE

SOUILLARD

ORSAY
n° d'ordre : 3124

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3 eme cycle

MATHEMATIQUES STATISTIQUES

PAR

Mademoiselle LAREDO Catherine

SUJET : QUELQUES ETUDES ASYMPTOTIQUES EN DYNAMIQUE DE POPULATIONS

soutenue le 14 décembre 1981 devant la Commission d'examen

MM. DACUNHA-CASTELLE Président

RUGET

TOMASSONE

SOUILLARD

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

ABSTRACT

In this study, techniques of large deviations are applied to obtain asymptotical results on spatial branching processes.

Discrete time multitype spatial branching processes are first considered. It is shown that asymptotically the positions normalized by 1/n of persons of various types occupy a fixed convex. Moreover, at each point of this convex the number and the proportions of the various types converge in probability to a limit depending on x.

Secondly, a continuous time unitype spatial branching process is considered. It is shown that under certain conditions the following result holds asymptotically : $\varepsilon \operatorname{Log} \#$(individuals alive at time $\frac{t}{\varepsilon}$ around $\frac{x}{\varepsilon}$)converges in probability to a limit depending on x, which is a generalization of the malthusian parameter for non-spatial processes.

Thirdly, non-homogeneous spatial branching processes are considered, i.e. processes in which the reproduction law depends on the state of the population at time t around x. Conjectured results about the propagation and the density of the population are presented here. Simulations on such models are carried out; theoretical conjectured results concerning the asymptotic speed of propagation are compared with those obtained by simulation.

Keywords : MULTITYPE SUPERCRITICAL SPATIAL BRANCHING PROCESS; CONTINUOUS TIME SUPERCRITICAL SPATIAL BRANCHING PROCESS; LARGE DEVIATIONS; MALTHUSIAN PARAMETER; TRAVELLING WAVES; VELOCITY OF SPREAD; SPREAD OF EPIDEMICS; SIMULATIONS OF EPIDEMICS.

Je voudrais remercier le Professeur Gabriel Ruget de bien avoir voulu diriger cette thèse . Ses idées l'ont largement inspirée, et ses conseils m'ont guidée tout au long de ce travail.

Je voudrais aussi remercier Alain Rouault, notre collaboration s'inscrit d'une manière ou d'une autre dans chaque ligne de ce travail.

Tous mes remerciements au Professeur Jean Bretagnolle. Sa lecture critique du chapitre 2 a permis de rectifier des erreurs et d'éclairer certains points.

Je remercie le Professeur Didier Dacunha-Castelle d'avoir accepté de présider ce jury.

Je remercie le Professeur Richard Tomassone qui, en tant que directeur de la Biométrie à l'I.N.R.A., a encouragé mes travaux dans ce domaine.

Je remercie Monsieur Souillard de s'être intéressé à ce travail, et d'avoir accepté de participer à ce jury.

Enfin, je voudrais remercier les membres du Laboratoire de Biométrie de Versailles et l'équipe de Statistiques d'Orsay pour la sympathie qu'ils m'ont témoignée.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547316_0035

PLAN DE LA THESE

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I - *Etude asymptotique de processus de branchement spatiaux homogènes, supercritiques, à temps discret unitypes et multitypes.* 5

1.1. - Marche aléatoire avec branchement dans $\mathbb{R}^k$ 5

1.1.1. Présentation des principaux résultats 8

1.1.2. Lois empiriques conditionnelles 11

1.2. - Processus de branchement spatial homogène multitype à temps discret 17

1.2.1. Présentation des résultats connus 19

a)- Processus de Galton-Watson multitype 19

b)- Processus défini à partir d'une chaîne de Markov 20

1.2.2. Etude de $EZ_n^j([na, na+\delta])$ 21

1.2.3. Interprétation des résultats 31

CHAPITRE II - *Une généralisation du paramètre de Malthus pour des processus de branchement spatiaux homogènes unitypes en temps continu (processus de Crump-Mode-Jagers).* 37

2.1. - Introduction et résultats préliminaires 37

1.1.1. Introduction 37

1.1.2. Notations et hypothèses 39

1.1.3. Résultats préliminaires 42

2.2. - Enoncé du théorème 44

2.2.1. Encadrement de Chernoff 45

2.2.2. Majoration de $E\zeta_t^\varepsilon(I)$ 46

2.3. - Démonstration du théorème 48

2.3.1. Démonstration de (i) 48

2.3.2. Démonstration de (ii) 48

2.4. - Quelques interprétations 58

2.4.1. Présentation des deux cas dégénérés 59

2.4.2. Interprétation en fonction des deux cas dégénérés 59

2.4.3. Ligne généalogique d'une personne en vie à l'instant t autour de x 60

2.4.4. Intérêt du paramètre ε. 61

CHAPITRE III - *Modèles stochastiques et équations déterministes Simulations de processus de branchement non homogènes* 63

3.1. - Equation différentielle associée au modèle stochastique de diffusion avec branchement 64

3.1.1. Diffusion avec branchement 65

3.1.2. Equations de réaction-diffusion 70

a)- Etude des solutions stationnaires stables et de leur domaine d'attraction 72

b)- Ondes de propagation 77

b_1) existence 77

b_2) stabilité des ondes de propagation 83

3.2. - Simulations de processus de branchement non homogènes saturés 85

3.2.1. Présentation des résultats conjecturés 86

a)- Processus non homogènes en temps continu 86

b)- Processus non homogènes saturés 88

3.2.2. Présentation de la simulation 89

a)- Loi de dispersion 90

b)- Loi de reproduction 91

c)- Organigramme de la simulation 92

3.2.3. Vitesses de propagation calculées avec l'équation différentielle associée 94

3.2.4. Résultats et discussion 101

a)- Résultats 102

b)- Introduction d'un terme correctif 104

APPENDICES

Appendice 1 : Démonstration du lemme 1.12 109

Appendice 2 : Programme FORTRAN de la simulation 115

BIBLIOGRAPHIE 117

INTRODUCTION

Il est possible de modéliser une grande variété de phénomènes spatiaux de dynamique de populations en superposant un mécanisme de croissance (i.e. naissance ou infection) et un mécanisme de dispersion. Ce dernier décrit comment sont reliés les déplacements des individus intervenant dans cette dispersion spatiale. Pour la propagation d'une nouvelle espèce, par exemple, le déplacement est une migration, et peut être défini comme la distance entre la position à sa naissance d'un individu et la position de son ascendant immédiat. Pour une épidémie, c'est la distance entre un individu infecté et celui qui l'infecte. Dans un cas les individus se déplacent, dans l'autre ils sont fixes : ce sont les germes qui se déplacent.

Etant donné l'état actuel de compréhension de tels phénomènes, nous avons choisi de nous intéresser à des modèles idéalisés par rapport à la complexité réelle des faits biologiques. Ceci rend possible une analyse mathématique avec laquelle nous pouvons comprendre les relations entre la vitesse de propagation, par exemple, et les paramètres du modèle. Nous étudierons ces phénomènes à l'aide de processus de branchement spatiaux. C'est une généralisation des processus de branchement "ordinaires" dans le sens que, au lieu d'une loi de probabilité sur le nombre des descendants d'un individu, nous supposerons donnée une loi de probabilité $P(d\phi)$ sur l'ensemble des mesures ponctuelles sur l'espace (dans le cas de générations en temps discret) ou sur l'espace × temps (temps continu). Ces processus seront toujours supposés supercritiques $\left[\left(\iint \phi\,(dx)\,P\,(d\phi)\right) > 1\right]$, car nous ne nous intéressons pas au problème de l'extinction, mais à la propagation des phénomènes étudiés.

Dans le premier chapitre sont rassemblés des résultats asymptotiques sur les processus de branchement spatiaux ($X = \mathbb{R}^k$) homogènes à temps discret unitypes et multitypes. Dans le cas unitype, nous déduisons des résultats de Biggins [9], qu'après une normalisation adéquate du temps et de l'espace, le

processus est asymptotiquement décrit par une fonction déterministe $\alpha(t,x)$ qui représente le logarithme d'une densité de population dans le domaine où la fonction α est positive. Nous étudions ensuite le cas de processus multitypes*. Asymptotiquement, les positions des individus de la $n^{\text{ième}}$ génération, normalisées par $\frac{1}{n}$ occupent un convexe fixé (obtention de vitesses de propagation). A l'intérieur de ce convexe les différentes populations croissent selon un même taux exponentiel. De plus nous obtenons les proportions des différents types dans un lieu x, si le temps n est suffisamment grand. Dans les deux cas, nous interprétons ces résultats à l'aide de la théorie de l'information.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions des processus de branchement spatiaux unitypes supercritiques en temps continu (processus de Crump-Mode-Jagers [25] avec marche aléatoire). A partir d'un processus donné de ce type, nous construisons une famille de processus indexés par ε en multipliant par ε les sauts et les durées de vie, et par $\frac{1}{\varepsilon}$ la fréquence des sauts. Si $\zeta_t^\varepsilon(A)$ est le nombre de personnes situées dans l'intervalle A à l'instant t, nous montrons que, ou bien presque sûrement, pour ε assez petit $\zeta_t^\varepsilon(A)$ est égal à zéro, ou bien $\varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^\varepsilon(A)$ tend en probabilité vers une limite déterministe positive quand ε tend vers zéro. Ceci permet de définir une fonction homogène $\alpha(t,x)$ dépendant du temps et de l'espace, qui généralise le paramètre de Malthus du modèle classique (non spatial), et vérifie une équation aux dérivées partielles non linéaire.

La première partie du troisième chapitre ne présente pas de résultats originaux. Nous montrons ici jusqu'à quel point est arrivée l'étude d'un modèle stochastique plus simple que celui que nous étudions : la diffusion avec branchement. Ceci nous amène à présenter les principaux résultats existant sur les équations de réaction-diffusion. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous construisons des processus non homogènes saturés, c'est-à-dire des processus où la loi de reproduction dépend de l'état de la population à l'instant t dans un

---

* *Ces processus peuvent être utilisés pour décrire une épidémie avec hôte intermédiaire, comme par exemple le bilharziose : c'est un cycle où les hommes sont susceptibles d'infecter les escargots, qui à leur tour infectent les hommes. Dans ce cas il n'est pas possible de confondre les émissions de germes issus des hommes et des escargots.*

voisinage de x. Ceci permet de lever l'hypothèse fondamentale de non-interaction entre les individus qui limite en général l'application des processus de branchement. On peut aussi modéliser des situations où, par exemple une trop forte concentration à un instant donné dans un lieu x diminue les possiblités de reproduction. Nous faisons intervenir cette dépendance par l'intermédiaire de la log densité $\alpha(t,x)$, définie au chapitre II. Nous conjecturons qu'il existe encore une log densité déterministe $\alpha(t,x)$ vers laquelle tend $\varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^{\varepsilon}(A)$, et que cette fonction $\alpha(t,x)$ vérifie une équation de type hyperbolique. A partir de cette équation nous déterminons la vitesse possible de propagation d'un tel processus. Nous présentons ici l'ensemble de ces conjectures car elles ont été des hypothèses de travail plausibles et fructueuses pour des simulations de processus non homogènes. Nous terminons en confrontant les résultats de ces simulations aux résultats théoriques que nous avons conjecturés.

Pour démontrer les résultats annoncés, nous utiliserons principalement la théorie des grandes déviations appliquée au cas des processus de branchement spatiaux supercritiques.

CHAPITRE I

ETUDE ASYMPTOTIQUE DE PROCESSUS DE BRANCHEMENT SPATIAUX, HOMOGENES, SUPERCRITIQUES, A TEMPS DISCRET, UNITYPES ET MULTITYPES

Les processus de branchement spatiaux homogènes supercritiques à temps discret on été étudiés par Biggins ([9],[10], [11]). Nous présentons d'abord les principaux résultats, car nous nous y réfèrerons ultérieurement (1.1.1). Puis nous obtiendrons à l'aide de la théorie de l'information, une interprétation éclairante des résultats précédents, en étudiant la loi empirique des variables $X_i(\gamma)$ conditionnellement au fait que la vitesse moyenne est a le long de la branche γ (1.1.2).

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des processus de branchement spatiaux supercritiques multitypes. Ces processus sont obtenus en "superposant" un Galton-Watson multitype et un processus dont les transitions sont définies à partir d'une chaîne de Markov. Nous présenterons dans un premier paragraphe les résultats connus sur ces deux processus (1.2.1). Nous démontrerons ensuite un équivalent de l'espérance du nombre des individus d'un type donné présents à l'instant n au voisinage de na. Nous déduirons de ce résultat que la forme asymptotique de la population est un certain convexe à l'intérieur duquel on peut calculer le taux exponentiel de croissance et les fréquences moyennes locales des différents types. Puis, comme au paragraphe 1.1.2, nous présenterons une interprétation des précédents résultats en termes d'information.

1.1. - Marche aléatoire avec branchement dans $\mathbb{R}^k$

INTRODUCTION

Un ancêtre situé à l'origine des temps et de l'espace $X = \mathbb{R}^k$ vit pendant un temps unité. A la fin de sa vie, il a des enfants dont le nombre et les positions sont donnés par la réalisation d'un processus ponctuel Z sur $\mathbb{R}^k$ (i.e. un nombre aléatoire de positions aléatoires qui ne sont pas nécessairement distinctes). On obtient ainsi la première génération Z_1. A leur tour

ces personnes vivent pendant un temps unité et se reproduisent selon le même procédé, indépendamment les unes des autres. Les positions des enfants d'une personne située en x sont réparties suivant le processus ponctuel translaté $x + Z$.

Soit Z_n la mesure aléatoire ponctuelle décrivant la $n^{ième}$ génération et $\mathcal{F}^n$ la tribu engendrée par $Z_1, \ldots, Z_n$. On note μ l'intensité du processus ponctuel Z. Si B est un borélien de X, μ est une mesure sur X telle que :

$$EZ(B) = EZ_1(B) = \int_B d\mu(x).$$

Nous supposerons :

$$(H1) \quad 1 < m = \int_X d\mu(x) < \infty$$

Le processus de Galton-Watson obtenu en "oubliant les positions" ($T_n = Z_n(\mathbb{R}^k)$) est alors supercritique (car $ET_1 = m > 1$). Par conséquent, ce processus T_n survit avec une probabilité π strictement positive. On désigne par S l'ensemble de survie de ce processus. Une réalisation ω de ce processus est modélisée par un arbre (si ω appartient à S, cet arbre est infini). Une branche γ de longueur n représente la ligne généalogique d'un individu de la $n^{ième}$ génération ; $X_1(\gamma), \ldots, X_n(\gamma)$ désignent les variables aléatoires correspondant aux arrêtes successives le long de la branche γ.

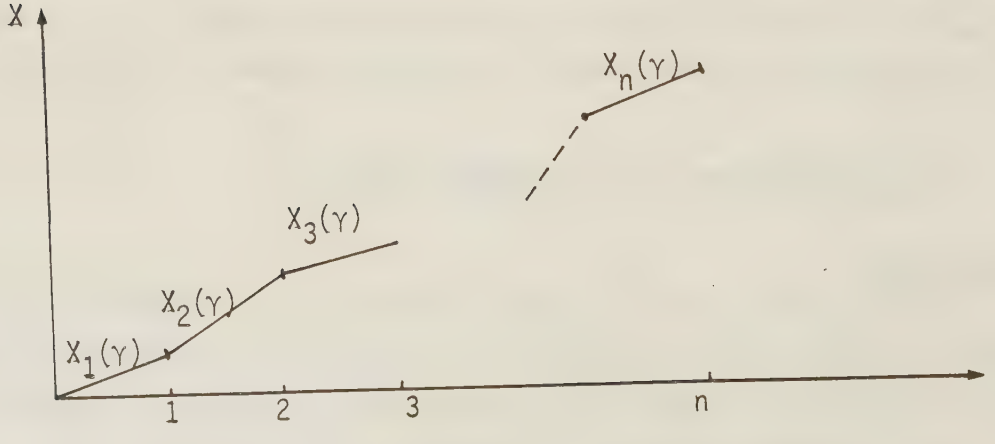


FIGURE 1.1.

Si θ désigne le point générique du dual Ξ de X, on définit la fonction :

$$L_\mu(\theta) = L(\theta) = \text{Log} \int_X e^{<\theta,x>} d\mu(x)$$

La fonction L est convexe. On appelle transformée de Cramer h_μ de la mesure μ la duale convexe au sens de Young-Orlicz de la fonction L :

$$h_\mu(x) = h(x) = \sup_{\theta \in \Xi} \{<\theta,x> - L(\theta)\}$$

La fonction h est convexe, semi-continue inférieurement et finie dans l'intérieur de l'enveloppe convexe fermée C du support de μ. Si x appartient à cet ensemble, cette borne supérieure est atteinte au point θ_o tel que :

$$L'(\theta_o) = x$$

Nous ferons sur la mesure μ les hypothèses suivantes :

(H2) si C est l'enveloppe convexe fermée du support de μ, alors $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$ et $\mu(\partial C) = 0$

(H3) $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \quad L_\mu(\theta) < \infty$

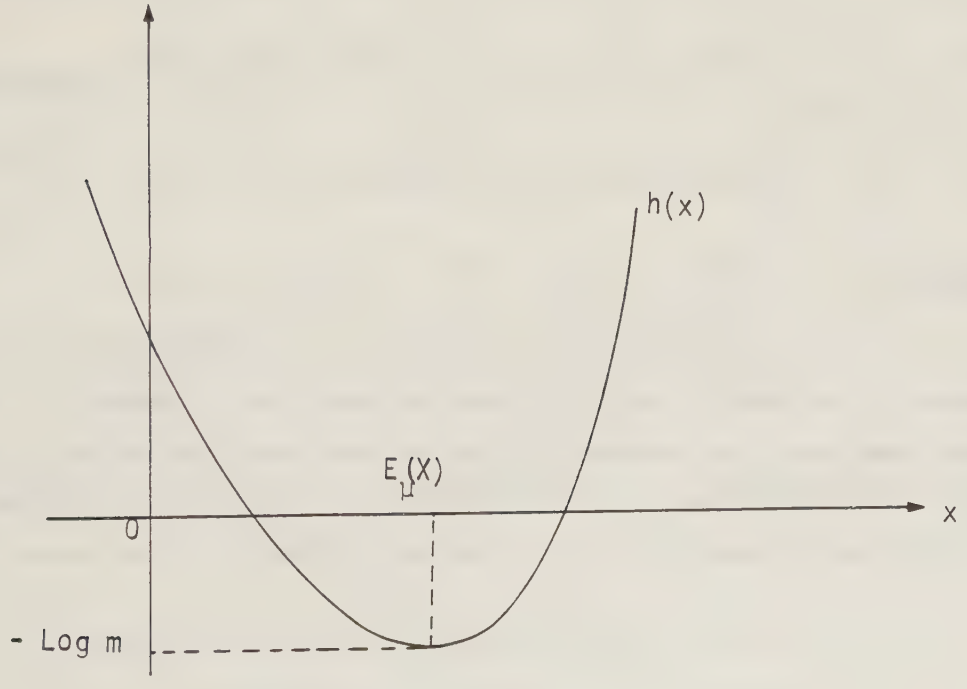


FIGURE 1.2.

Soit B un borélien de X ; on obtient immédiatement :

$$EZ_n(B) = \int_B \mu^{*n}(dx) \qquad (1.1)$$

où μ^{*n} désigne le $n^{\text{ième}}$ produit de convolution de la mesure μ.
La ressemblance avec la loi de la somme de n v.a.i.i.d. permet d'attendre des résultats asymptotiques sur $EZ_n(\cdot)$ et par suite sur $Z_n(\cdot)$, au moins sur l'ensemble de survie S.

1.1.1. - Présentation des principaux résultats

Théorème 1.1. (Biggins [9])

On suppose $X = \mathbb{R}$. Soit $a_o = \frac{1}{m}\int x d\mu(x)$ et $I = \{x, h(x) \leq 0\}$.
Soit $a < a_o$.

. si $a \notin I$, $Z_n(]-\infty, na]) = 0$ p.s. à partir d'un certain rang

. si $a \in \overset{\circ}{I}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} Z_n(]-\infty, na]) = -h(a)$ p.s. sur S.

Pour $a > a_o$, les résultats sont identiques en considérant $Z_n([na, +\infty[)$.

Corollaire :

Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ tel que $a < a_o$ et $\delta > 0$ donné. Alors on a :
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} Z_n(n(a-\delta, a]) \to -h(a)$ p.s. sur S.

Si $a > a_o$, il existe un résultat similaire.

Remarque :

C'est en quelque sorte à partir de ce corollaire que nous avons élaboré notre modèle. En effet nous considèrerons désormais le temps et l'espace comme deux coordonnées distinctes. Nous supposerons que la durée d'une génération est égale à ε. A l'instant t, il y a eu $\frac{t}{\varepsilon}$ générations et nous observerons la population au voisinage du point $\frac{x}{\varepsilon}$. Le corollaire devient :

$$\text{Si } \frac{x}{t} \in \overset{\circ}{I}, \ \varepsilon \operatorname{Log} Z_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{1}{\varepsilon}[x-\delta, x]\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} -\operatorname{th}\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{p.s.} \qquad (1.2)$$

Ainsi dans cette étude asymptotique, le processus stochastique étudié est décrit par la fonction déterministe $\sup\,(-\,\mathrm{th}\,(\frac{x}{t}),\,0)$. Nous poserons :

$$\alpha\,(t,x) = -\,t\,h\,(\frac{x}{t})$$

La fonction α sera appelée "ε log densité". Elle est solution de l'équation :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = L\,(-\,\frac{\partial\alpha}{\partial x}) \qquad (1.3)$$

Forme asymptotique de la population

Dans le cas où $X = \mathbb{R}$, la vitesse de propagation v^+ (resp. v^-) (cf. Figure 1.1) dans la direction positive (resp. négative) est donnée par :

$$v^+ = \sup_x \{x\,;\,h(x) < 0\} \qquad v^- = \inf_x \{x\,;\,h(x) < 0\} \qquad (1.4)$$

Dans le cas où $X = \mathbb{R}^k$, la notion de forme asymptotique n'est pas aussi immédiate. On désignera par $\mathcal{J}^{(n)}$ l'ensemble des positions des individus de la $n^{\text{ième}}$ génération normalisé par $\frac{1}{n}$:

$$\mathcal{J}^{(n)} = \{\frac{z_r^n}{n}\,;\,r=1,2,\ldots\} \quad \text{où } z_r^n \text{ est la position du } r^{\text{ième}} \text{ individu de la génération } n.$$

On note $\mathcal{K}^{(n)}$ l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{J}^{(n)}$ et $\mathcal{J} = \{x \in X,\ h(x) \le 0\}$.

Théorème 1.2. : (Biggins [10])

1) $\mathcal{K}^{(n)}$ vérifie les inégalités :

$$r\ \text{int}\ \mathcal{J} \subset \liminf \mathcal{K}^{(n)} \subset \limsup \mathcal{K}^{(n)} \subset \mathcal{J} \quad \text{p.s. sur } S$$

où r int $\mathcal{J}$ est l'intérieur relatif du convexe $\mathcal{J}$.

2) . $\forall\, a>0\ \ (\exists n_o)\ n \ge n_o \quad \mathcal{J}^{(n)} \subset \{x \in X \quad h(x) \le a\}$ p.s. sur S

. $\forall x \in \mathcal{J}$ il existe une suite de points x_n telle que

$\forall n \quad x_n \in \mathcal{J}^{(n)}$ et $x_n \to x$ p.s. sur S

3) $\Delta\,(\mathcal{J}^{(n)}, \mathcal{J}) \to 0$ p.s. sur S

où Δ est le métrique de Hansdorff sur les compacts de X.

Conséquence :

On définit la vitesse de propagation dans une direction donnée $\vec{w}$ (vecteur unitaire) $v_{\vec{w}}$ (figure 1.3).

Si $v_{\vec{w}}^{(n)} = \sup_{x \in \mathcal{J}^{(n)}} \langle x, \vec{w} \rangle$. (1.5)

Alors $\lim_{n\to\infty} v_{\vec{w}}^{(n)} = v_{\vec{w}} = \sup_{x \in \mathcal{J}} \langle x, \vec{w} \rangle$

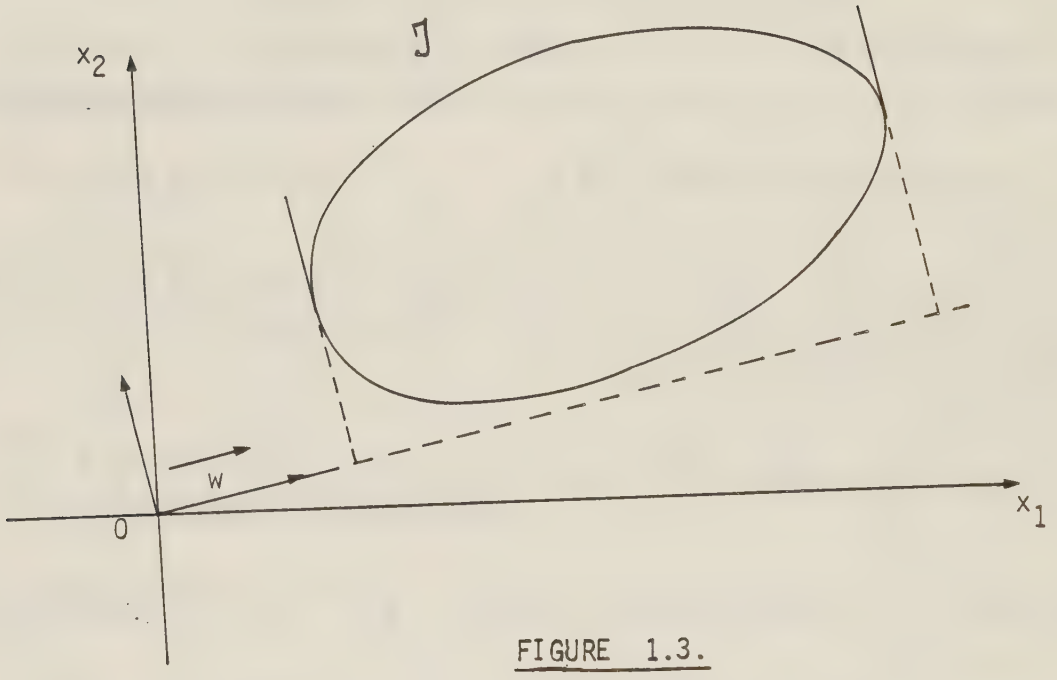


FIGURE 1.3.

Calcul d'une formule exacte pour $Z_n(dx)$

Soit $W^{(n)}(\theta) = \frac{1}{\hat{\mu}(\theta)^n} \int_X e^{\theta x} Z_n(dx) = \sum_r \frac{\exp(\theta z^n_r)}{\hat{\mu}(\theta)^n}$. Si $L(\theta) < \infty$, $W^{(n)}(\theta)$ est une martingale non négative. On désigne par $W(\theta)$ la limite de cette martingale.

Théorème 1.3. : [11] (Enoncé dans le cas où le support de μ n'est pas un réseau

Soit $b \in \{x, h(x) < 0\}$ et soit θ le point en dualité avec b : $\theta = h'(b)$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$E\left(W^{(1)}(\theta) \left(\mathrm{Log}_+ W^1(\theta)\right)^{\frac{5}{2}+\varepsilon}\right) < \infty$$

Soit g une fonction telle que $e^{-\theta x} g(x)$ soit absolument intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors :

$$\sqrt{2\pi n\, L''(\theta)}\ e^{nh(b)} \int_{\mathbb{R}} g(x-nb)\, Z_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} W(\theta) \int e^{-\theta x} g(x)\, dx \qquad \text{p.s.}$$

Remarques :

1) L'hypothèse sur $W^1(\theta)$ suffit à assurer : $E(W(\theta)) = 1$,

2) Si I est un intervalle de la forme $[y, x+y[$, on a :

$$\sqrt{2\pi n\, L''(\theta)}\ e^{nh(b)}\, Z_n(nb+I) \to \frac{1}{\theta}\, e^{-\theta y}\,(1 - e^{-\theta x})\ W(\theta) \qquad \text{p.s.}$$

1.1.2. - Lois empiriques conditionnelles

Tous ces résultats décrivent uniquement le comportement des extrémités des branches γ (comportement de Z_n). Il est possible d'aller plus loin en précisant "l'histoire" d'une branche γ de longueur n qui a eu comme vitesse moyenne a (i.e. $\frac{X_1(\gamma) + \ldots X_n(\gamma)}{n} \sim a$). Conditionnellement à cet évènement deux questions peuvent se poser :

- comment sont construites les variables aléatoires $X_i(\gamma)$ représentant les arêtes successives le long de γ.
- quels ont été les processus de reproduction le long de γ.

La première question revient à étudier la loi empirique des sauts $Z_n = \frac{1}{n} \sum_1^n \delta_{X_i(\gamma)}$ le long de la branche γ, la deuxième la loi empirique des processus de reproduction de tous les individus situés sur γ.

Pour répondre à ces questions, nous probabiliserons l'ensemble des généalogies de la façon suivante : on tire une réalisation $\omega \in S$ du processus de branchement, puis on munit l'ensemble Γ_n^ω des branches γ de longueur n de l'arbre ω de la probabilité uniforme $\mathcal{P}_n^\omega$. Nous démontrerons les deux propositions :

Proposition 1.4.

Soit $a \in \{x,\ h(x) < 0\}$ et $\delta > 0$. On suppose $a < a_o = \frac{1}{m} \int x\, d\mu(x)$. Alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \mathcal{P}_n^{\omega} \left(\gamma \in \Gamma_n^{\omega},\ \frac{X_1(\gamma) + \dots X_n(\gamma)}{n} \in (a-\delta,\ a]\right) = -h(a) - \operatorname{Log} m \quad \text{p.s.}$$

Il existe un résultat similaire pour $a > a_o$.

Proposition 1.5.

Soit $a \in \{x,\ h(x) < 0\}$ et $\delta>0$. On suppose $a < a_o$, et on définit, si $\theta = h'(a)$, la probabilité μ^{θ} :

$$\mu^{\theta}(dx) = \exp(\theta x - L(\theta))\ \mu(dx).$$

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de μ^{θ} dans $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$, ensemble des probabilités sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence étroite. Alors il existe $K>0$ et un entier $n(K)$ tels que :

$$n\geq n(K) \quad \mathcal{P}_n^{\omega}\left(\gamma \in \Gamma_n^{\omega},\ \frac{1}{n}\sum_1^n \delta_{X_i(\gamma)} \in \mathcal{V} \Big/ \frac{1}{n}\sum_1^n X_i(\gamma) \in (a-\delta, a]\right) \geq 1 - e^{-Kn}$$

Cette dernière proposition fournit une interprétation éclairante des résultats de Biggins. En effet, cette modification exponentielle μ^{θ} de μ, qui est la loi des sauts $X_i(\gamma)$ conditionnellement au fait que la vitesse moyenne est voisine de a, est précisément le changement de mesure effectué par Biggins ([9], [11]), et qui, dans ces articles, n'apparaît que pour des raisons purement analytiques.

La proposition 1.4 est une conséquence immédiate du théorème 1.1. Pour démontrer la proposition 1.5, nous utiliserons le lemme :

Lemme 1.6. : Soient $X_1, \dots, X_n \dots$ des variables indépendantes équidistribuées de loi μ sur $\mathbb{R}$. On suppose que la transformée de Laplace de μ est partout finie. Soit $a < a_o = \int x\,\mu(dx)$, $\theta = h'(a)$, $\mathcal{V}$ un voisinage de $\mu^{\theta}(dx) = \exp(\theta x - L(\theta))\ \mu(dx)$ dans $\mathcal{M}^1(X)$ muni de la topologie de la convergence étroite, et $\delta > 0$ donnés. Alors il existe $K>0$ et un entier $n(K)$ tels que :

$$n\geq n(K) \quad P\left(\frac{\delta_{X_1} + \dots \delta_{X_n}}{n} \in \mathcal{V} \Big/ \frac{X_1 + \dots X_n}{n} \in (a-\delta, a]\right) \geq 1 - e^{-Kn}.$$

Remarque :

Ce lemme est énoncé dans le cas $X = \mathbb{R}$ où la structure d'ordre simplifie la démonstration. Elle reste vraie pour $X = \mathbb{R}^k$, sous l'hypothèse $\{E(\exp t\,||X||) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$. Si $B(a,\varepsilon)$ est la boule de centre a et de rayon ε :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim \sup P\left(\frac{\delta_{X_1} + \dots \delta_{X_n}}{n} \in \mathcal{V} / \frac{X_1 + \dots X_n}{n} \in B(a,\varepsilon)\right) = 1.$$

Démonstration du lemme 1.6

Soit $I_\mu(\lambda)$ l'information de Kullback de λ par rapport à μ:

$$\begin{cases} I_\mu(\lambda) = \int_X \operatorname{Log} \frac{d\lambda}{d\mu}\, \lambda(dx) & \text{si } \lambda \text{ est absolument continue par rapport à } \mu \\ = +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La démonstration repose sur le résultat suivant (par exemple Bretagnolle [15]). Si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des $\{\lambda \in \mathcal{M}^1(X),\ E_\lambda(X) = a\}$, alors on a :

$$\operatorname{Inf}_{\lambda \in \mathcal{A}} I_\mu(\lambda) = h_\mu(a) = \sup_\theta [\langle \theta, a \rangle - L(\theta)]$$

De plus cet infimum est atteint pour la modification exponentielle μ^θ de μ :

$$\mu^\theta(dx) = e^{\theta x - L(\theta)}\, \mu(dx) \qquad \text{avec } \theta = h'(a).$$

Posons $V_n = \frac{1}{n} \Sigma\, \delta_{X_i}$. Nous devons démontrer :

$$P\left(V_n \in \mathcal{V}^c / \frac{1}{n} \Sigma\, X_i \in (a-\delta, a]\right) \le e^{-Kn} \qquad \text{où } \mathcal{V}^c = \text{complémentaire de } \mathcal{V}.$$

Or la variable aléatoire $\frac{1}{n} \Sigma\, X_i$ est le barycentre de V_n, mais cette application barycentre n'est pas nécessairement définie sur $\mathcal{V}^c$ tout entier. Nous utiliserons un lemme (Azencott [3] p. 41, 42) affirmant que, à tout A positif donné, on peut associer un compact K_A de $\mathcal{M}^1(X)$ tel que :

- l'application barycentre b est définie continue sur K_A $\left(b(\mu) = \int x\mu(dx)\right)$
- $P(V_n \notin K_A) \le e^{-nA}$ pour n suffisamment grand.

On en déduit :

$$P\,(V_n \in \mathcal{V}^c \cap \{\tfrac{1}{n}\Sigma X_i \in (a-\delta,\, a]) \leq P\,(V_n \in (\mathcal{V}^c \cap b^{-1}\,((a-\delta,a]) \cap K_A) + e^{-nA}.$$

Nous utiliserons un théorème de Sanov ([3]) pour estimer cette probabilité. Posons $U = \mathcal{V}^c \cap b^{-1}\,((a-\delta,\, a]) \cap K_A$. On a :

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{Log}\,P\,(V_n \in U) \leq -\inf_{\lambda\in\overline{U}} I_\mu(\lambda).$$

Décomposons cette information de Kullback par rapport à μ^θ

$$I_\mu(\lambda) = I_{\mu^\theta}(\lambda) + \theta \int x\,\lambda\,(dx) - L(\theta) \qquad \text{si} \quad \lambda \in K_A.$$

Dans le domaine considéré, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\theta = h'(a) < 0 \qquad \text{et} \qquad a-\delta < \int x\,\lambda\,(dx) \leq a.$$

On en tire :

$$\inf_{\lambda\in\overline{U}} I_\mu(\lambda) \geq \inf_{\lambda\in\overline{\mathcal{V}}^c} I_{\mu^\theta}(\lambda) + \theta a - L(\theta) \geq \tau + h(a)$$

où on a posé : $\tau = \inf_{\lambda\in\overline{\mathcal{V}}^c} I_{\mu^\theta}(\lambda)$.

Ce nombre τ est stictement positif, car $I_\mu(\lambda)$ est s.c.i., positive ou nulle et égale à 0 si et seulement si $\lambda = \mu$.
Il suffit maintenant de choisir $A > \max(0,\, h(a) + \tau.)$ et K tel que $0 < K <$ pour obtenir le résultat recherché.

Démonstration de la proposition 1.5.

Considérons l'application de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des mesures ponctuelles sur $\mathbb{R}$:

$$x \xrightarrow{\ i\ } \delta_x.$$

Définissons alors le processus ponctuel $\tilde{Z}$ image de Z par cette application.

$\tilde{Z}$ est un processus ponctuel à valeurs dans $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$. On vérifie immédiatement que l'intensité $\tilde{\mu}$ de $\tilde{Z}$ est telle que :

$$\int_{\mathcal{M}^1(\mathbb{R})} \phi(\lambda)\, \tilde{\mu}\,(d\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \phi\,(\delta_x)\, \mu(dx)$$

où ϕ désigne une fonction continue à support compact de $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Par cette application i, ce qui correspondait dans les études précédentes à la vitesse moyenne $\frac{1}{n}\Sigma X_i$ est la mesure empirique : $\frac{1}{n}\sum_1^n \delta_{X_i}$.

Posons $N_n(\omega) = \text{card}\,\{\gamma \in \Gamma_n^\omega\ ;\ \frac{1}{n}\Sigma\,\delta_{X_i(\gamma)} \in B\}$ où B est un borélien de $\mathcal{M}^1(X)$. De la remarque précédente, on déduit que :

$$EN_n = \int_{\mathcal{M}^1(\mathbb{R})} 1_{nB}(\lambda)\, \tilde{\mu}^{*n}\,(d\lambda) = \int_{\mathbb{R}} 1_{nB}\,(\delta_x)\, \mu^{*n}(dx) = m^n\, P(\tfrac{1}{n}\Sigma\,\delta_{Y_i} \in B)$$

où les Y_i désignent des variables indépendantes, de loi $\mu_o = \frac{1}{m}\mu$
Nous pouvons appliquer le théorème de Sanov ([3]) pour les mesures empiriques

$$\frac{1}{n}\,\text{Log}\; P\,(\tfrac{1}{n}\Sigma\,\delta_{Y_i} \in B) \le - \operatorname*{Inf}_{\lambda\in\bar{B}}\; I_{\mu_o}(\lambda).$$

Par conséquent, N_n est une variable aléatoire positive entière telle que :

$$EN_n \le m^n\, e^{-nI} \qquad \text{où} \quad I = \operatorname*{Inf}_{\lambda\in\bar{B}}\; I_\mu\,(\lambda)$$

Pour tout $c > m\, e^{-I}$

$$P\,(N_n > c^n) \le \left(\frac{m\, e^{-I}}{c}\right)^n \qquad \text{(inégalité de Tchebitcheff)}$$

En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, on obtient :

$$\limsup\; (N_n)^{\frac{1}{n}} \le m\, e^{-I} \quad \text{p.s.}$$

La fin de la démonstration est maintenant très proche de celle du lemme 1.6. En effet nous devons estimer :

$$\mathcal{P}_n^\omega\,(\gamma \in \Gamma_n^\omega,\ \tfrac{1}{n}\sum_1^n \delta_{X_i(\gamma)} \in \mathcal{V}^c\ /\ \tfrac{1}{n}\sum_1^n X_i(\gamma) \in (a-\delta,\ a]) = \frac{N_n'}{D_n}$$

D'après la proposition 1.5, D_n est tel que : $D_n = e^{-n\,(h(a) + \text{Log } m) + o(n)}$ p.s.

Le numérateur N_n' est égal à :

$$N_n' = \mathcal{P}_n^{\omega}(\gamma \in \Gamma_n^{\omega},\ \{\tfrac{1}{n}\Sigma\,\delta_{X_i(\gamma)} \in \mathcal{U}^c\} \cap \{\tfrac{1}{n}\Sigma\,X_i(\gamma) \in (a-\delta,\ a]\})$$

Introduisons le même compact K_A que dans le lemme 1.6 . On a :

$$\mathcal{P}_n^{\omega}(\gamma \in \Gamma_n^{\omega},\ \tfrac{1}{n}\Sigma\,\delta_{X_i(\gamma)} \notin K_A) = \frac{\text{card}\ \{\gamma \in \Gamma_n^{\omega}\ ;\ \frac{1}{n}\Sigma\,\delta_{X_i(\gamma)} \notin K_A\}}{m^n}$$

On obtient alors :

$$\limsup\ (\text{card}\ \{\gamma \in \Gamma_n^{\omega}\ ;\ \tfrac{1}{n}\Sigma\,\delta_{X_i(\gamma)} \notin K_A\})^{\frac{1}{n}} \le m\,e^{-A}$$

On en déduit :

$$N_n' \le \mathcal{P}_n^{\omega}\,(\gamma \in \Gamma_n^{\omega},\ \tfrac{1}{n}\Sigma\,\delta_{X_i(\gamma)} \in \mathcal{U}^c \cap b^{-1}\,((a-\delta,\ a]) \cap K_A) + e^{-nA}$$

$$\le \exp\,(-n \inf_{\lambda \in \overline{\mathcal{U}}^c} I_{\mu_o}(\lambda)) + e^{-nA} \le e^{-n\,(h_o(a) + \tau)} + e^{-nA}$$

où $h_o(a) = h_{\mu_o}(a) = h(a) + \text{Log } m$, et $\tau = \inf_{\lambda \in \overline{\mathcal{U}}^c} I_{\mu_o}(\lambda) > 0$.

Il ne reste plus qu'à choisir K tel que $0<K<\tau$ et $A > \max\,(0,\ h_o(a) + \tau)$.

Note :

A. Rouault [38] a précisé le comportement de l'arbre généalogique conditionnellement au fait que la vitesse moyenne est a. Ce résultat est obtenu en étudiant la loi empirique des processus ponctuels de reproduction le long d'une branche γ ayant eu a comme vitesse moyenne $(\frac{1}{n}\Sigma\,X_i(\gamma) \sim a)$. Nous énoncerons brièvement ces résultats.

Soit P la loi de probabilité de Z sur l'ensemble M des mesures ponctuelles sur $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R} \times M$ la probabilité :

$$C_P^{\theta}\,(dx,\ d\phi) = \exp\,(\theta x - L(\theta))\ \phi\,(dx)\ P\,(d\phi).$$

On désigne par $\phi_1(\gamma), \ldots, \phi_n(\gamma)$ les "portées" dont sont extraites les $X_i(\gamma)$.

Proposition 1.7. (Rouault [38])

Soit $a \in \{x,\ h(x) < 0\}$ tel que, par exemple $a<a_o$. Soit $\delta>0$ donné et, $\theta = h'(a)$. Si $\mathcal{V}$ est un voisinage de C_P^θ dans $\mathcal{M}^1(\mathbb{R} \times M)$ muni de la topologie de la convergence étroite. Alors il existe $K>0$ et un entier $n(K)$ tels que :

$$n \geq n(K) \quad \mathcal{P}_n^\omega \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i(\gamma),\ \phi_i(\gamma)} \in \mathcal{V} \ /\ \frac{1}{n} \Sigma\ X_i(\gamma) \in [a-\delta, a]\right) \geq 1 - e^{-Kn}$$

L'interprétation de ce résultat est la suivante [38] : les individus situés au temps n près de na ont eu en moyenne une généalogie construite à l'aide de C_P^θ (avec $\theta = h'(a)$). Deux décompositions de C_P^θ donnent deux constructions d'une généalogie typique :

1°) soit $\phi_i^\theta(dx) = \exp(\theta x - \mathrm{Log} \int e^{\theta t}\ \phi_i(dt))\ \phi_i(dx) = \dfrac{e^{\theta x}}{\hat{\phi}_i(\theta)}\ \phi_i(dx)$

et $P^\theta(d\phi) = [\int \exp(\theta x - L(\theta))\ \phi(dx)]\ P(d\phi)$ probabilité sur M.

Alors on a : $C_P^\theta(dx, d\phi) = \phi^\theta(dx)\ P^\theta(d\phi)$.

On tire une mesure ponctuelle ϕ_i suivant P^θ puis un point x_i dans le support de ϕ_i suivant ϕ_i^θ. La suite $(x_1, \phi_1), \ldots, (x_n, \phi_n)$ correspond à une généalogie $(X_1(\gamma), \phi_1(\gamma)), \ldots, (X_n(\gamma), \phi_n(\gamma))$.

2°) soit $\mu^\theta(dx) = \exp(\theta x - L(\theta))\ \mu(dx)$. Puisque $C_P(dx, d\phi) = \mu(dx) \cdot P_x(d\phi)$ où P_x est la distribution de Palm de P [26], on a $C_P^\theta(dx, d\phi) = \phi^\theta(dx) \cdot P_x(d\phi)$. On tire un point x_i suivant μ^θ puis une mesure ponctuelle suivant P_{x_i}, c'est-à-dire suivant P sachant qu'un point est déjà fixé en x_i.

1.2. - Processus de branchement spatial homogène multitype à temps discret

Présentation du modèle

Considérons une famille de R^2 processus ponctuels $(Z_{ij})_{1 \leq i,j \leq R}$ sur $X = \mathbb{R}^d$, où $I = \{1, 2, \ldots, R\}$ représente l'ensemble des types. Un ancêtre situé à l'origine des temps et de l'espace X vit pendant un temps unité. Son type est aléatoire distribué selon la loi ν sur I. A la fin de sa vie, il a des enfants de différents types : le nombre et les positions des enfants de type j issus

d'un père de type i sont donnés par une réalisation du processus ponctuel Z_{ij}. Ainsi est obtenue la première génération. A leur tour ces personnes vivent pendant un temps unité et se reproduisent selon le même procédé, indépendamment les unes des autres. Les positions des enfants de type j d'une personne de type i située en x sont réparties suivant une réalisation du processus ponctuel translaté $x + Z_{ij}$.

Notations

On désigne par Z_n^i la mesure aléatoire ponctuelle décrivant les individus de type i de la $n^{ième}$ génération et par Z_n le vecteur constitué des Z_n^i, $i=1,\ldots,R$. L'intensité du processus ponctuel Z_{ij} est la mesure μ_{ij}, $\mathfrak{M}$ est la matrice de ces mesures, et $\hat{M}(\theta)$ est la matrice des transformées de Laplace $\hat{\mu}_{ij}(\theta)$. On désigne par $M = \hat{M}(0)$ la matrice des masses $m_{ij} = \int_X d\mu_{ij}(x)$. La $n^{ième}$ puissance de convolution de la matrice $\mathfrak{M}$ est notée $\mathfrak{M}^{*n}$. Elle est définie par la relation de récurrence :

$$\mathfrak{M}^{*1} = \mathfrak{M} \quad ; \quad (\mathfrak{M}^{*n})_{ij} = \sum_{r=1}^{R} (\mathfrak{M}^{*(n-1)})_{ir} * \mu_{rj}.$$

Position du problème

Nous voulons estimer le plus précisément possible $Z_n^j(nB)$, où B désigne un borélien de X. Les définitions se traduisent par :

$$E\, Z_1^j(B) = \sum_{i=1}^{R} \nu_i \int_B d\mu_{ij}(x) = \sum_{i=1}^{R} \nu_i\, \mu_{ij}(B)$$

De cette égalité, nous déduisons pour $Z_n^j(B)$:

$$E\, Z_n^j(B) = \sum_{i=1}^{R} \nu_i\, (\mathfrak{M}^{*n})_{ij}(B) \qquad (1.6)$$

Il y a superposition de deux phénomènes :

a) La croissance exponentielle de la population dûe au processus de Galton-Watson multitype supercritique sous-jacent.

b) Le déplacement dans l'espace suivant une marche aléatoire d'une particule marquée (processus dont les transitions sont définies à partir d'une chaîne de Markov à états finis).

En réunissant les résultats connus pour ces deux processus, nous pouvons espérer obtenir une description de $Z_n^j(nB)^*$. Cependant dans le cas b), Keilson et Wishart [29] ont seulement démontré un analogue du théorème central limite. Le calcul d'un équivalent plus précis a été esquissé avec la méthode du point selle. Si a_o désigne la position moyenne pour un processus de type b), le théorème limite central permet d'étudier $Z_n^j(n[a_o + \frac{b}{\sqrt{n}}, a_o + \frac{c}{\sqrt{n}}])$, ce qui ne couvre pas les domaines que nous voulons étudier. A ce stade interviennent des phénomènes de grandes déviations puisque nous étudions un évènement rare, s'il n'y avait qu'un individu, "se trouver loin de la position moyenne", mais pour des tailles de populations exponentiellement grandes. Le résultat de grandes déviations dont nous avons besoin doit être plus précis qu'un analogue d'un théorème de Chernoff, car le logarithme présent dans ces théorèmes "écraserait" la fréquence locale des différents types.

Après une brève présentation des résultats connus pour les processus de Galton-Watson multitypes et pour les processus définis à partir d'une chaîne de Markov finie, nous calculerons un équivalent en $o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ de $E\, Z_n^j(nB)$. Deux conséquences importantes de ce résultat seront l'existence d'une "zône de présence" asymptotique, ainsi que les fréquences locales en moyenne des différents types. Une adaptation possible de la méthode de Biggins [10] permet de démontrer que ces résultats sont vrais presque sûrement. Nous présenterons seulement le résultat attendu, la démonstration ne sera pas faite ici mais elle figurera dans [33]. Puis nous obtiendrons une interprétation qui permet d'éclairer les résultats précédents, en montrant que la loi empirique le long d'une branche conditionnée par l'évènement "avoir a comme vitesse moyenne" est décrite par la matrice $\mathcal{M}^\theta$ utilisée auparavant.

1.2.1. - Présentation des résultats connus

a) Processus de Galton-Watson multitype

Les hypothèses sont :

(i) la matrice $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le R}$ est positivement régulière (c'est-à-dire $\exists n$ tel que M^n ait tous ses éléments strictement positifs).

---

* Note : *Biggins [12] a étudié un modèle très proche de celui que nous avons présenté, mais dans une optique différente de celle qui nous intéresse.*

(ii) le processus est non singulier (un processus est singulier si un individu a exactement un enfant ; le processus devient alors équivalent à une chaîne de Markov sur l'espace des types I.

(iii) le processus est supercritique (l'hypothèse (i) implique que M possède une valeur propre positive simple ρ de module strictement supérieur à tous les autres). Nous supposons $\rho>1$.

Théorème 1.8 (théorème limite dans le cas supercritique) (Athreya-Ney [2])

Soient u le vecteur propre à droite et v le vecteur propre à gauche associés à ρ tels que :

$$\sum_1^R v_i = 1 \quad ; \quad \sum u_i v_i = 1 \quad ; \quad (\forall i) \quad u_i \text{ et } v_i \geq 0.$$

Il existe une variable aléatoire W positive ou nulle telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n^i}{\rho^n} = v_i W \qquad \text{p.s.}$$

Si de plus la condition (*) est vérifiée :

$$(*) \quad \forall i,j \qquad E\,(Z_1^j \operatorname{Log} Z_1^j \,/\, Z_o = 1_i) < \infty \quad \text{où} \quad 1_i = (\overset{\langle \ldots\ldots i \ldots \rangle}{0,0,0..1,0.0})$$

alors $P(W>0) > 0$, et $E(W/Z_o = 1_i) = u_i$. Si (*) n'est pas vérifiée, $W=0$ p.s.

b) Processus défini à partir d'une chaîne de Markov

On suppose que $\mathfrak{M}$ matrice des mesures μ_{ij} est telle que $M=(m_{ij})$ est stochastique ($(\forall i) \sum_{j=1}^R m_{ij} = 1$), irréductible, apériodique, et que le processus est non singulier. On définit une chaîne de Markov (S_n, R_n) sur $\mathbb{R}^d \times I$ homogène dans le temps, ayant pour transitions :

$$P(S_n \in A, R_n = j \,/\, S_{n-1} = x, R_{n-1} = i) = \int_A \mu_{ij}(dy-x)$$

et de loi initiale $\delta_o \times \nu$.

Le processus marginal S_n est parfois appelé processus semi-Markovien [29].

Théorème 1.9. ([29])

On suppose pour tout i,j que le support de μ_{ij} n'est pas inclus dans un réseau. Soit ϕ la fonction de répartition de la gaussienne $N_d(0,I_d)$ et v le vecteur propre à gauche normalisé de M. Si $\mathfrak{M}$ a des moments d'ordre 1 et 2 finis alors :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\,a}{\sigma\sqrt{n}} < x,\ R_n = j\right) = v_j\,\phi(x)$$

a et σ sont des constantes associées aux moments d'ordre 1 et 2 de $\mathfrak{M}$. Si M_1 est la matrice d'ordre 1 de $\mathfrak{M}$ ($(M_1)_{ij} = \int x\, d\mu_{ij}(x)$), alors

$$a = {}^t v\, M_1\, \mathbb{1}$$

σ ne s'exprime pas de façon simple.

Remarques :

1°) Le cas où toutes les mesures μ_{ij} ont un support constitué par un réseau de même pas pour tout i,j, a été étudié par Miller [35], qui obtient un résultat analogue.

2°) Soit $\mathfrak{F}(t)$ la matrice des transformées de Fourier des μ_{jk} : $(\mathfrak{F}(t))_{jk} = \int e^{itx}\,\mu_{jk}(dx)$. La matrice $\mathfrak{F}(t)$ est analytique dans un voisinage de 0. Elle admet donc dans ce voisinage une valeur propre $\lambda(t)$ de module strictement supérieur à tous les autres. La fonction $\lambda(t)$ est dérivable et on a :

$$a = -i\,\lambda'(0) \qquad , \qquad \sigma^2 = -\lambda''(0) + (\lambda'(0))^2$$

Le cas d'un processus singulier, où la position est fonction déterministe du type, correspond à $\sigma = 0$.

1.2.2. - Etude de $E\,Z_n^j([na, na+\delta])$

La méthode que nous utilisons est classique pour l'obtention de résultats exacts de grandes déviations : changement de probabilité recentrant le problème, et calcul d'un développement de $\mathfrak{M}^{*n}$ plus précis que celui présent

dans le théorème limite central. Nous ferons les hypothèses suivantes :

H1) : $\forall i,j \quad \mu_{ij}$ n'est pas définie sur un réseau

H2) : $\forall i,j \quad \mu_{ij}$ admet une transformée de Laplace $\hat{\mu}_{ij}(\theta)$ partout finie (c'est une hypothèse classique de grandes déviations).

H3) : le processus est non singulier (dans un processus singulier, la position est fonction déterministe du type).

H4) : le processus de Galton-Watson sous jacent est régulier non singulier, supercritique.

La matrice $\hat{M}(\theta)$ est partout définie. Elle est positivement régulière. D'après le théorème de Perron-Frobenius, elle admet une plus grande valeur propre simple $\rho(\theta)$. Soient $u(\theta)$ et $v(\theta)$ les vecteurs propres à droite et à gauche associés à $\rho(\theta)$ et normalisés de la façon suivante :

$$\sum_i v_i(\theta) = 1 \quad ; \quad \sum_i u_i(\theta)\, v_i(\theta) = 1$$

On sait que la fonction $L(\theta) = \text{Log}\, \rho(\theta)$ est convexe ([35], [40]). On lui associe sa duale convexe H définie par :

$$H(x) = \sup_\theta \; [\theta x - \text{Log}\, \rho(\theta)]$$

H jouera le rôle de transformée de Cramer pour le problème considéré.

Théorème 1.10

On désigne par a_o le point tel que : $a_o = L'(0) = \frac{1}{\rho(0)}\, {}^t v(0)\, M_1\, u(0)$. Soient $a > a_o$ et $\delta > 0$ donnés. Au point a on associe $\theta = H'(a)$. Alors Z_n^j vérifie :

$$E(Z_n^j\, ([na, na+\delta]/R_o = i) = \frac{1-e^{-\theta\delta}}{\theta}\, \frac{u_i(\theta)\, v_j(\theta)}{\sqrt{2\pi n\, L''(\theta)}}\, e^{-nH(a)}\, (1 + o(1))$$

(Il existe un résultat analogue pour $a < a_o$).

N.B. : Cette formule reste vraie quand δ est égal à $+\infty$ ou est de la forme n^α avec $\alpha \geq 0$.

Conséquence : Fréquence moyenne locale des différents types.

Si $a \in \{x, H(x) < 0\}$, alors les populations des différents types croissent exponentiellement au voisinage de a, avec le même taux exponentiel de croissance, et les fréquences des individus de types distincts vérifient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E\,(Z_n^j\,([na, na+\delta] \,/\, R_o=i)}{E\,(Z_n^k\,([na, na+\delta] \,/\, R_o=i)} = \frac{v_j(\theta)}{v_k(\theta)} \qquad (1.7)$$

Théorème 1.11

1) Si $a \in \{x, H(x) > 0\}$, alors on a, si $a>a_o$

$Z_n^j\,([na, +\infty[) = 0$ p.s.sauf pour un nombre fini de n.

2) Si $a \in \{x, H(x) < 0\}$ alors on a, pour $a>a_o$

$$\frac{1}{n} \text{Log}\, Z_n^j\,([na, +\infty[\,/\, R_o = i) \to -H(a) \quad \text{p.s. sur } S$$

ensemble de survie du processus de Galton Watson multitype sous-jacent.

Le théorème 1.11 se déduit facilement du théorème 1.10 et nous en présentons d'abord la démonstration.

Démonstration de 1.11. (1.10 étant admis)

(Elle est faite selon la méthode de Biggins [9], adaptée au problème considéré). La variable Z_n^j est entière. Par conséquent, si I est l'intervalle $[a, +\infty[$

avec $a \in \{x, H(x) > 0\}$, Z_n^j vérifie :

$$P\,(Z_n^j\,(nI) > 0 \,/\, R_o = i) = P\,(Z_n^j\,(nI) \geq 1 \,/\, R_o = i) \leq E\,(Z_n^j\,(nI)/R_o = i)$$

Dans le domaine où $H(a)$ est strictement positif, la série $E\,(Z_n^j\,(nI)/R_o = i)$ est sommable. En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, on obtient le résultat recherché pour 1).

- La majoration dans le cas 2) est obtenue de façon analogue : on suppose que $a \in \{x, H(x) < 0\}$ et $a > a_o$. Soit c donné tel que $c > e^{-H(a)} > 1$. Alors

$$P\left(Z_n^j([na, +\infty[) > c^n / R_o = i\right) \leq \frac{1}{c^n} E\left(Z_n^j([na, +\infty[) / R_o = i\right)$$

$$\leq K \frac{e^{-nH(a)}}{c^n}$$

Du lemme de Borel-Cantelli, on déduit :

$$P\left(\limsup_n Z_n^j([na, +\infty[) > c^n / R_o = i\right) = 0 \qquad \forall\, c > e^{-H(a)}$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left(Z_n^j([na, +\infty[/ R_o = i)\right)^{\frac{1}{n}} \leq e^{-H(a)} \qquad \text{p.s.}$$

- Pour la minoration, on construit à partir du processus étudié un processus a-k extrême unitype (k entier positif fixé). La première génération de ce nouveau processus $W_j^{a,k}$ est constituée par les individus de type j de la $k^{\text{ième}}$ génération de Z situés à droite de ka. Les générations ultérieures sont obtenues suivant le même procédé. Ce processus $W_j^{a,k}$ est un processus où tous les individus sont de type j, sauf l'ancêtre qui est de type i. Soit N_{ij}^n le nombre d'individus de la $n^{\text{ième}}$ génération de ce processus (a-k) extrême. Alors N_{ij}^n est un processus de Galton-Watson tel que :

$$E\left(N_{ij}^1\right) = \frac{1}{\theta} \frac{u_i(\theta)\, v_j(\theta)}{\sqrt{2\pi k\, L''(\theta)}} e^{-kH(a)} > 1$$

pour k choisi suffisament grand. Par conséquent ce processus est supercritique et on en déduit ([25]) que :

$$(1.8) \qquad \left(N_{ij}^n\right)^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{\theta} \frac{u_i(\theta)\, v_j(\theta)}{\sqrt{2\pi k\, L''(\theta)}} e^{-k\, H(a)} \qquad \text{p.s. sur l'ensemble de}$$

survie de ce processus de Galton-Watson. Fixons s tel que $0 \leq s < k$, puis z la position d'une personne de type quelconque ℓ de la $(rk+s)^{\text{ième}}$ génération du processus originel. Alors nous pouvons construire un processus (a-k) extrême associé à la marche aléatoire de branchement ayant z comme ancêtre. Les individus de la $n^{\text{ième}}$ génération de ce processus (a-k) extrême appartiennent à la génération $((n+r)\, k+s)$ du processus originel et sont à droite de $nka+z$. Prenons $b < a$, alors si n est grand, toutes ces personnes sont de type j et

sont à droite de $((n+r)\,k+s)\,b$. Par conséquent de (1.8) on déduit :

$$(1.9)\quad \liminf_{\mathcal{M}} \{(Z^j_{mk+s}([(mk+s)b, +\infty[\,/\, R_o=i)\}^{\frac{1}{mk+s}} \geq \left(\frac{1}{\theta}\,\frac{u_i(\theta)\,v_j(\theta)}{\sqrt{2\pi k\,L''(\theta)}}\,e^{-kH(a)}\right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{p.s.}$$

Puisque (1.9) est vérifié pour tout s tel que $0\leq s<k$, on obtient :

$$\liminf_n (Z^j_n([nb, +\infty[\,/\, R_o=i))^{\frac{1}{n}} \geq \left(\frac{1}{\theta}\,\frac{u_i(\theta)\,v_j(\theta)}{\sqrt{2\pi k\,L''(\theta)}}\,e^{-kH(a)}\right)^{\frac{1}{k}}$$

p.s. sur S, l'ensemble de survie.

Maintenant, faisons tendre k vers l'infini ; les coefficients situés devant l'exponentielle tendent vers 1. On obtient :

$$\liminf_n \{Z^j_n([nb, +\infty[\,/\, R_o=i\}^{\frac{1}{n}} \geq e^{-H(a)} \qquad \text{p.s. sur } S$$

La fonction H est continue au point b, on peut donc faire décroître a vers b :

$$\liminf_n \{Z^j_n([nb, +\infty[\,/\, R_o=i\}^{\frac{1}{n}} \geq e^{-H(a)} \qquad \text{p.s. sur } S$$

pourvu que b appartienne à l'ensemble $\{x\,;\, H(x) < 0\}$.

Démonstration du théorème 1.10

On procède d'abord à une transformation de la matrice $\mathcal{M}$, afin de recentrer le problème.

La matrice $\hat{M}(\theta)$ des transformées de Laplace $\hat{\mu}_{ij}(\theta)$ vérifie :

$$\sum_{j=1}^{R} \hat{M}_{ij}(\theta)\,u_j(\theta) = \rho(\theta)\,u_i(\theta) \qquad (\forall i)$$

Par conséquent, la matrice $\mathcal{M}^\theta$ ayant pour terme ij :

$$\mu^\theta_{ij}(dx) = \frac{1}{\rho(\theta)}\,\frac{u_j(\theta)}{u_i(\theta)}\,e^{\theta x}\,\mu_{ij}(dx) \qquad \text{est stochastique.}$$

Les résultats de Keilson et Wishart [29] peuvent alors être appliqués à la matrice $\mathfrak{M}^\theta$. Soit $\hat{M}^\theta(\phi)$ la matrice des transformées de Laplace $\hat{\mu}_{ij}^\theta(\phi)$ et $\rho^\theta(\phi)$ la plus grande valeur propre de $\hat{M}^\theta(\phi)$. La position asymptotique moyenne a_θ et la variance σ_θ^2 associées à $\mathfrak{M}^\theta$ sont donc telles que :

$$a_\theta = \frac{d}{d\phi}\,[\rho^\theta(\phi)]_{\phi=0} \;;\; \sigma_\theta^2 = \frac{d^2}{d\phi^2}\,[\rho^\theta(\phi)]_{\phi=0} - a_\theta^2$$

Ce ne sont pas exactement les résultats énoncés dans le théorème 1.9 . Les expressions de a et σ^2 ont seulement été adaptées au fait que les mesures constituant la matrice $\mathfrak{M}^\theta$ admettent des transformées de Laplace.

Il ne reste plus qu'à calculer ces dérivées. Soient $u^\theta(\phi)$ et $v^\theta(\phi)$ les vecteurs propres à droite et à gauche de $\hat{M}^\theta(\phi)$ associés à $\rho^\theta(\phi)$. En remarquant que :

$\hat{\mu}_{ij}^\theta(\phi) = \frac{1}{\rho(\theta)}\,\frac{u_j(\theta)}{u_i(\theta)}\,\hat{\mu}_{ij}(\theta+\phi)$, un calcul simple conduit à :

$$\rho^\theta(\phi) = \frac{\rho(\theta+\phi)}{\rho(\theta)}$$

$$u_j^\theta(\phi) = \frac{u_j(\theta+\phi)}{u_j(\theta)} \qquad (\forall\, j)$$

$$v_j^\theta(\phi) = u_j(\theta)\, v_j(\theta+\phi) \qquad (\forall\, j)$$

Par conséquent : $a_\theta = \frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)} = L'(\theta)$

$$\sigma_\theta^2 = \frac{\rho''(\theta)}{\rho(\theta)} - \left[\frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}\right]^2 = L''(\theta).$$

Pour évaluer $E\, Z_n^j([na, na+\delta])$, nous ferons donc le changement de matrices de mesures $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^\theta$ où θ est le point tel que : $L'(\theta) = a$, soit encore $\theta = H'(a)$.

Posons :

$$\mu_{ij}^{(n)}(dx) = (\mathfrak{M}^{*n})_{ij}(dx) \;;$$

$$(\mu_{ij}^\theta)^{(n)}(dx) = [(\mathfrak{M}^\theta)^{*n}]_{ij}(dx) \;.$$

Par récurrence, on obtient :

$$\mu_{ij}^{(n)}(dx) = \rho(\theta)^n \frac{u_i(\theta)}{u_j(\theta)} e^{-\theta x} (\mu_{ij}^{\theta})^{(n)}(dx). \qquad (1.10)$$

Par conséquent, nous devons calculer :

$$E(Z_n^j([na, na+\delta]) / R_o=i) \int_{na}^{na+\delta} (\mathfrak{M}^{*n})_{ij}(dx) = \rho(\theta)^n \frac{u_i(\theta)}{u_j(\theta)} \int_{na}^{na+\delta} e^{-\theta x} (\mu_{ij}^{\theta})^{(n)} dx$$

En utilisant l'égalité $H(a) = \theta a - L(\theta)$ pour $\theta = H'(a)$, on obtient :

$$E(Z_n^j([na,na+\delta])/R_o=i) = \frac{u_i(\theta)}{u_j(\theta)} e^{-nH(a)} \int_0^{\delta} e^{-\theta y} (\mu_{ij}^{\theta})^{(n)} (na + dy)$$

Pour évaluer cette intégrale, nous utiliserons le lemme :

Lemme 1.12

Soit $\mathfrak{M}$ une matrice (R, R) de mesures μ_{jk} stochastique. On suppose :

H1 : $\forall(j,k)$ le support de μ_{jk} ne constitue pas un réseau

H2 : $\exists\, \nu \geq 1$ tel que : $\int |f_{jk}(t)|^{\nu} dt < \infty \qquad \forall j,k$

avec $f_{jk}(t) = \int e^{itx} \mu_{jk}(dx)$ transformée de Fourier de μ_{jk}.

H3 : M matrice des masses est apériodique, irréductible, positivement régulière.

H4 : M1, M2, M3 moments d'ordre 1,2,3 de $\mathfrak{M}$ sont finis

H5 : $\mathfrak{M}$ est non dégénérée (ce qui est équivalent à supposer $\lambda''(0) \neq 0$)

Alors la fonction $G_{jk}^n(x) = \int_{-\infty}^{x} (\mathfrak{M}^{*n})_{jk} (na + \sigma\sqrt{n}\, du)$ vérifie :

$$G_{jk}^n(x) - v_k(0) \left[\bar{\Phi}(x) + \frac{\mu_3(1-x^2)}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2}} I\right] = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

où, si $\lambda(t)$ désigne la plus grande valeur propre de la matrice $\mathcal{F}(t)$ des transformées de Fourier $f_{ij}(t)$, alors les constantes a, σ^2 et μ_3 sont telles que :

$$a = -i\,\lambda'(0), \quad \sigma^2 = -(\text{Log}\,\lambda(t))''(0), \quad \mu_3 = i\,(\text{Log}\,\lambda(t)''')'(0) .$$

$v_k(0)$ est la $k^{\text{ième}}$ coordonnée du vecteur propre à gauche $v(0)$ de M associé à $\lambda=1$. La fonction $\Phi(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$. Le terme $o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, uniformément en x et plus vite que $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Remarques :

1) Avec les notations de 1.2.1.b), la fonction $G^n_{jk}(x)$ représente la probabilité $P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x,\ R_n = j \,/\, R_o = i\right)$ associée au processus de type b), de matrice m

2) Quand la matrice $\hat{M}(\theta)$ existe, alors $\rho(\theta) = \lambda(-i\theta)$ et par conséquent

$$a = \rho'(0) \ ; \quad \sigma^2 = [\text{Log}\,\rho(\theta)]''(0) \ ; \quad \mu_3 = [\text{Log}\,\rho(\theta)]'''(0)$$

La démonstration de ce lemme, assez technique, sera présentée dans l'appendice 1.

Calcul de l'intégrale $\int_0^{\delta} e^{-\theta y}\,(\mu^{\theta}_{ij})^{(n)}\,(na + dy) = I_a$

Ce calcul est une adaptation de celui de Gallager ([23], chapitre 5, p.188-193).

Soit $G^{\theta,n}_{i,j}$ la fonction de répartition de la variable normalisée. Alors :

$$I_a = \int_0^{\frac{\delta}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-\theta x \sigma\sqrt{n}}\ G^{\theta,n}_{i,j}\,(dx)$$

Une intégration par parties conduit à :

$$I_a = e^{-\theta\delta}\ [G^{\theta,n}_{ij}\,(\tfrac{\delta}{\sigma\sqrt{n}}) - G^{\theta,n}_{ij}(0)]$$

$$+\ \theta\sigma\sqrt{n}\int_0^{\frac{\delta}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-\theta x\sigma\sqrt{n}}\ (G^{\theta,n}_{ij}(x) - G^{\theta,n}_{ij}(0))\,dx\ .$$

L'inégalité : $1 \geq e^{-\frac{x^2}{2}} \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ est vérifiée pour tout x. On en déduit que, si $x>0$, la fonction Φ vérifie :

$$\frac{x}{\sqrt{2\pi}} \geq \Phi(x) - \Phi(0) \geq \frac{x}{\sqrt{2\pi}} - \frac{x^3}{6\sqrt{2\pi}}$$

En utilisant le lemme et cette inégalité, on obtient :

$$(1.11)\quad |G_{ij}^{\theta,n}(x) - G_{ij}^{\theta,n}(0) - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} v_j^{\theta}(0)| \leq v_j^{\theta}(0) \{\frac{x^3}{6\sqrt{2\pi}} + \frac{|\mu_3|(1-(1-x^2)\, e^{-\frac{x^2}{2}})}{6\,\sigma^3\sqrt{2\pi n}}\} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

On approxime alors, dans I_a, $(G_{ij}^{\theta,n}(x) - G_{ij}^{\theta,n}(0))$ par $\frac{x}{\sqrt{2\pi}} v_j^{\theta}(0)$, ce qui conduit à :

$$I_a = v_j^{\theta}(0) \{\frac{\delta}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\, e^{-\theta\delta} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} [\frac{1}{\theta}(1 - e^{-\theta\delta}) - \delta\, e^{-\theta\delta}]\} + \text{termes d'erreur}$$

Le terme d'erreur issu du premier membre de I_a est un $o(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Pour le deuxième membre de I_a, on multiplie chacun des termes d'erreur de (1.11) par $(\theta\sigma\sqrt{n})\exp(-\theta\sigma\sqrt{n}\,x)$, et, en intégrant, on obtient que chacune des intégrales est un $o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

D'après les calculs précédents, le vecteur propre $v^{\theta}(0)$ est tel que :

$$v_j^{\theta}(0) = u_j(\theta)\, v_j(\theta)$$

L'intégrale I_a s'écrit : $I_a = u_j(\theta)\, v_j(\theta)\, \frac{1 - e^{-\theta\delta}}{\theta\sigma\sqrt{2\pi n}}$, ce qui clôt la démonstration.

La méthode que Biggins a utilisée dans le cas de processus unitypes [11] pour obtenir un résultat presque sûr sur $Z_n([na, na+\delta[)$ s'adapte au cas de processus multitypes. La démonstration de ce résultat est en cours, et nous ne ferons qu'énoncer le résultat attendu.

Proposition 1.13 (cf. [33])

Soit $a \in \{x, H(x) < 0\}$ et tel que $a > a_o$. On pose $\theta = H'(a)$. Alors si g est une fonction telle que $e^{-\theta x} g(x)$ est absolument intégrable, on a :

$$\sqrt{2\pi n\, L''(\theta)} \int g(x-na)\, Z_n^j (dx / R_o = i) \xrightarrow[p.s.]{} W_i(\theta)\, v_j(\theta) \int e^{-\theta x} g(x)\, dx$$

où $W_i(\theta)$ est une variable aléatoire indépendante du type final et telle que : $E\, W_i(\theta) = u_i(\theta)$.

Conséquences :

1) pour $g = 1_{[0,\delta]}(x)$, on obtient :

$$\sqrt{2\pi n\, L''(\theta)}\; Z_n^j ([na, na+\delta] / R_o = i) \xrightarrow{p.s.} W_i(\theta)\, v_j(\theta)\, \frac{1 - e^{-\theta\delta}}{\theta}$$

2) puisque la variable $W_i(\theta)$ est indépendante du type final, la proposition 1.13 permet d'obtenir les fréquences locales des types :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n^j ([na, na+\delta] / R_o = i)}{Z_n^k ([na, na+\delta] / R_o = i)} = \frac{v_j(\theta)}{v_k(\theta)} \qquad \text{p.s. si } a \in \{x, H(x) < 0\}.$$

Commentaires

a) La variable $W_i(\theta)$ est obtenue comme limite d'une martingale non négative. Pour $\theta = 0$, elle correspond à une martingale classique dans la théorie des processus de branchement ([2], chapitre VI, 4).

Posons $W_i^n(\theta) = \frac{1}{\rho(\theta)^n} \sum_j u_j(\theta) \int e^{\theta x} Z_n^j (dx / R_o = i) \qquad 1 \le i \le R$

Alors $W_i^n(\theta)$ est une martingale non négative. En effet soient $r_{n,j}$ une énumération des individus de type j de la $n^{\text{ième}}$ génération et $z_{r_{n,j}}$ les positions respectives de ces individus. Alors on a l'égalité :

$$E\,(W_i^n(\theta) / \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{\rho(\theta)^n} \sum_j u_j(\theta) \sum_{r_{n,j}} \sum_k \sum_{r_{n-1,k}} e^{\theta(z_{r_{n,j}} - z_{r_{n-1,k}})} \times e^{\theta z_{r_{n-1,k}}}$$

$$= \frac{1}{\rho(\theta)^n} \sum_k \sum_{r_{n-1,k}} e^{\theta z_{r_{n-1,k}}} \sum_j u_j(\theta)\, \hat{M}_{kj}(\theta) = W_i^{n-1}(\theta).$$

La limite $W_i(\theta)$ de cette martingale est la variable aléatoire apparaissant dans la proposition 1.13 .

Cette proposition exige que soit imposée au processus la condition supplémentaire :

$$(\forall i) \quad \sup_n \; W_i^n(\theta) < \infty \qquad \text{pour tout } \theta .$$

Cette condition doit pouvoir être traduite en termes plus simples sur le processus.

1.2.3. - Interprétation des résultats

Dans le cas de processus unitypes, il a été obtenu que la probabilité μ^θ utilisée pour calculer Z_n $[na, +\infty[$ est telle que :

$h(a) = \text{Inf}\ \{I_\mu(\lambda)\ ;\ \lambda \in \mathcal{M}^1 \text{ et } \int x\, d\lambda(x) = a\}$ est atteint pour μ^θ.

Dans le cas de processus multitypes, il est possible de mettre en évidence le même phénomène.

Soit π une loi sur l'ensemble des types $[1, \ldots, R]$ et soient $\mathcal{M} = (\mu_{ij}(dx))$ et $\mathcal{N} = (\nu_{ij}(dx))$ deux matrices stochastiques. On définit les lois sur $[1, \ldots, R]^2 \times \mathbb{R}$:

$$\pi \otimes \mu\,(i, j, dx) = \pi_i\, \mu_{ij}\,(dx)$$

$$\pi \otimes \nu\,(i, j, dx) = \pi_i\, \nu_{ij}\,(dx)$$

Alors l'information de Kullback de $\pi \otimes \nu$ par rapport à $\pi \otimes \mu$ est [18] :

$$I_{\pi \otimes \mu}(\pi \otimes \nu) = \sum_i \pi_i \sum_j \int_{\mathbb{R}} \text{Log} \frac{\nu_{ij}(dx)}{\mu_{ij}(dx)}\, \nu_{ij}\,(dx) \qquad \text{si } \nu_{ij} \ll \mu_{ij}$$

$$= +\infty \qquad \text{sinon}$$

Proposition 1.14

La matrice stochastique $\mathcal{M}^\theta$ de terme générique $\dfrac{1}{\rho(\theta)} \dfrac{u_j(\theta)}{u_i(\theta)}\, e^{\theta x}\, \mu_{ij}\,(dx)$ est telle que :

$$H(a) = \underset{\pi, \nu}{\text{Inf}} \{I_{\pi \otimes \mu}(\pi \otimes \nu)\ ;\ \sum_{i,j} \pi_i \int x\, \nu_{ij}(dx) = a\ ;\ \sum_i \pi_i \int \nu_{ij}(dx) = \pi_j\}$$

est atteint pour $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\theta$ et $\pi = (u_i(\theta)\, v_i(\theta))_{i=1, \ldots, R}$.

Remarque :

A partir de ce résultat, il est possible de montrer [33] l'analogue de la proposition 1.4 pour des processus semi-Markovien, autrement dit que la loi empirique conditionnelle correspondant à la vitesse moyenne a est composée de la distribution des types $[i \to u_i(\theta)\ v_i(\theta)]$ et des transitions $\mu^{\theta}_{ij}(dx)$. Ceci conduirait à la proposition :

Soit $a<a_o$, $\theta = H'(a)$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de $\lambda^{\theta}(i,j,dx) = u_i(\theta)\ v_j(\theta)\ e^{\theta x - L(\theta)}\ \mu_{ij}(dx)$ dans $\mathcal{M}^1([1,\ldots,R]^2 \times \mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence étroite. Alors il existe $K>0$ et un entier $n(K)$ tels que, si $X_k = S_k - S_{k-1}$, on a, avec les notations de 1.2.b) :

$$n \geq n(K) \quad (\forall\, r_o) \quad P_{r_o}\left(\frac{1}{n}\sum_1^n \delta_{R_{k-1},R_k,X_k} \in \mathcal{V} \,/\, \frac{1}{n}\sum X_i \in (a-\delta,a]\right) \geq 1 - e^{-Kn}.$$

Démonstration de 1.14

Il s'agit de minimiser :

$$I_{\pi \otimes \mu}(\pi \otimes \nu) = \sum_{i,j} \pi_i \int \mathrm{Log}\ \frac{\nu_{i,j}(dx)}{\mu_{i,j}(dx)} \cdot \nu_{ij}(dx)$$

sous les contraintes

(1.12) $\sum_j \int \nu_{ij}(dx) = 1 \qquad (\forall\, i)$ ($\mathcal{N}$ stochastique)

(1.13) $\sum_i \pi_i = 1$ (π probabilité)

(1.14) $\sum \pi_i \int \nu_{ij}(dx) = \pi_j \qquad (\forall\, j)$ (π mesure stationnaire des types associée à $\mathcal{N}$)

(1.15) $\sum_{i,j} \pi_i \int x\ \nu_{ij}(dx) = a$ (a vitesse moyenne).

Introduisons les multiplicateurs de Lagrange α_i pour (1.12), β (pour (1.13), γ_j pour (1.14) et δ pour (1.15).

La fonctionnelle $J(\nu_{ij}(dx), \pi_i)$ doit être minimum au point recherché.

$$J((\nu_{ij}),\pi_i) = \sum_{i,j} \pi_i \int \nu_{ij}(dx) \operatorname{Log} \frac{\nu_{ij}(dx)}{\mu_{ij}(dx)} + \sum_i \alpha_i \sum_j \int \nu_{ij}(dx) + \beta \sum_i \pi_i$$

$$+ \sum_j \gamma_j \left(\sum_i \pi_i \int \nu_{ij}(dx) - \pi_j\right) + \delta \sum_{i,j} \pi_i \int x\, \nu_{ij}(dx)$$

Annulons formellement les dérivées de J :

$$(1.16)\quad \frac{\partial J}{\partial \pi_i} = \sum_j \int \nu_{ij}(dx) \quad \operatorname{Log} \frac{\nu_{ij}(dx)}{\mu_{ij}(dx)} + \beta + \sum_j \gamma_j \left(\int \nu_{ij}(dx) - \chi_i(j)\right) + \delta \sum_j \int x\, \nu_{ij}(dx)$$

$$(1.17)\quad \frac{\partial J}{\partial \nu_{ij}} = \pi_i \operatorname{Log} \frac{\nu_{ij}(dx)}{\mu_{ij}(dx)} + \pi_i + \alpha_i + \gamma_j \pi_i + \delta \pi_i x .$$

De (1.17) on déduit que : $\nu_{ij}(dx) = e^{-\delta x - (1 + \gamma_j) - \frac{\alpha_i}{\pi_i}} \times \mu_{ij}(dx).$ (1.18)

La combinaison linéaire : $\sum_j \int \nu_{ij}(dx) \frac{\partial J}{\partial \nu_{ij}} - \pi_i \frac{\partial J}{\partial \pi_i}$ est nulle pour tout i.

Par conséquent : $(\forall i)\quad 1 - \beta + \gamma_i + \frac{\alpha_i}{\pi_i} = 0.$

En remplaçant, dans (1.18), $(-\gamma_j)$ par $\frac{\alpha_j}{\pi_j} - \beta + 1$, on obtient :

$$\nu_{ij}(dx) = \exp\left(\frac{\alpha_j}{\pi_j} - \frac{\alpha_i}{\pi_i} - \beta\right) \exp(-\delta x)\, \mu_{ij}(dx).$$

De (1.14) on déduit que :

$$\sum_i \pi_i \exp\left(-\frac{\alpha_i}{\pi_i}\right) \int e^{-\delta x} \mu_{ij}(dx) = e^{\beta}\, \pi_j \exp\left(\frac{\alpha_j}{\pi_j}\right).$$

Le vecteur $\left(\pi_i \exp\left(-\frac{\alpha_i}{\pi_i}\right)\right)_{1 \le i \le R}$ est donc un vecteur propre à gauche de $\hat{M}(-\delta)$ associé à la valeur propre e^{β}.

En utilisant (1.12), on obtient :

$$\sum_j \exp\left(\frac{\alpha_j}{\pi_j}\right) \int e^{-\delta x} \mu_{ij}(dx) = e^{\beta} \exp\left(\frac{\alpha_i}{\pi_i}\right).$$

Par conséquent $(\exp \frac{\alpha_i}{\pi_i})_i$ est un vecteur propre à droite de $\hat{M}(-\delta)$ associé à la valeur propre de e^{β}.

Les coordonnées de ces deux vecteurs sont strictement positives, d'où e^{β} est la plus grande valeur propre de $\hat{M}(-\delta)$ et on a :

$$e^{\beta} = \rho(-\delta).$$

La mesure stationnaire des types est, d'après le paragraphe précédent, le vecteur $u_i(-\delta)\, v_i(-\delta)$. On en tire :

$$\pi_i = u_i(-\delta)\, v_i(-\delta) \quad \text{et} \quad u_i(-\delta) = \exp \frac{\alpha_i}{\beta_i}$$

Utilisons maintenant (1.15), pour obtenir :

$$\sum_{i,j} u_i(-\delta)\, v_j(-\delta) \int x\, e^{-\delta x}\, \mu_{ij}(dx) = a\, \rho(-\delta)$$

soit encore : $- {}^t v(-\delta) \cdot \frac{d}{d\delta} \hat{M}(-\delta)\, u(-\delta) = a\, \rho(-\delta)$

Or le premier membre de cette égalité est égal à $-\rho'(-\delta)$. En effet on obtient l'expression de $\rho'(\theta)$ à partir de l'égalité :

$${}^t v(\theta)\, \hat{M}(\theta) = \rho(\theta)\, {}^t v(\theta) \quad .$$

En dérivant par rapport à θ, on a :

$$[{}^t v(\theta)]'\, \hat{M}(\theta) + {}^t v(\theta)\, \hat{M}'(\theta) = \rho'(\theta)\, {}^t v(\theta) + \rho(\theta)\, [{}^t v(\theta)]'.$$

Une multiplication à droite par $u(\theta)$ conduit à :

$${}^t v(\theta)\, \hat{M}'(\theta)\, u(\theta) = \rho'(\theta) \quad \text{avec} \quad (\hat{M}(\theta)')_{ij} = \int x\, e^{\theta x}\, \mu_{ij}(dx)$$

Finalement δ vérifie :

$$-\frac{\rho'(-\delta)}{\rho(-\delta)} = a$$

Par conséquent, $\delta = -\theta$, $\nu_{ij}(dx) = \frac{1}{\rho(\theta)} \frac{u_j(\theta)}{u_i(\theta)}\, e^{\theta x}\, \mu_{ij}(dx) = \mu^{\theta}_{ij}(dx)$ et $\pi_i = u_i(\theta)\, v_i(\theta)$, ce qui clôt la démonstration.

Note : De la même façon qu'au paragraphe 1.1.2, on peut déterminer comment est construite une généalogie typique ayant eu a comme vitesse moyenne. Notons $\phi(dx, r)$ une mesure ponctuelle sur $\mathbb{R} \times [1, \ldots, R]$ et $P_s(d\phi)$ la loi de reproduction d'un individu de type s.

1°) Le type r_o de l'ancêtre est choisi suivant la loi $(u_j(\theta)\, v_j(\theta))_{j=1,\ldots,R}$ puis on tire une mesure ponctuelle marquée ϕ_1 suivant la probabilité :

$$P^{\theta}_{r_o}(d\phi) = \sum_j \int e^{\theta x - L(\theta)} \phi(dx, j) \frac{u_j(\theta)}{u_{r_o}(\theta)} P_{r_o}(d\phi)$$

et un point (x_1, r_1) suivant $\phi^{\theta}_1(dx,r) = \dfrac{u_r(\theta)\, e^{\theta x}\, \phi_1(dx,r)}{\sum_s u_s(\theta) \int e^{\theta x}\, \phi_1(dx,s)}$

Les points suivants sont construits de la même façon, à partir de l'ancêtre immédiat.

2°) Le type de l'ancêtre r_o est choisi comme précédemment. Le couple (x_1, r_1) est tiré suivant la loi $\mu^{\theta}_{r_o,r}(dx)$. Puis on tire une mesure ponctuelle marquée suivant la mesure de Palm de P_{r_o}, c'est-à-dire sachant qu'un individu de type r_1 est déjà fixé en x_1, etc...

CHAPITRE II

UNE GENERALISATION DU PARAMETRE DE MALTHUS POUR DES PROCESSUS DE BRANCHEMENT SPATIAUX HOMOGENES UNITYPES EN TEMPS CONTINU (PROCESSUS de CRUMP-MODE-JAGERS)*

2.1. - INTRODUCTION ET RESULTATS PRELIMINAIRES

2.1.1. - Introduction

Un modèle classique de croissance de populations est décrit par un processus de Bellman-Harris [25]. Chaque individu a une durée de vie aléatoire de loi G et à sa mort donne naissance à un nombre aléatoire (d'espérance $m>1$) d'enfants. Partons d'un seul individu à $t = 0$ et construisons l'arbre généalogique. A l'instant t, des individus de différentes générations sont en vie. Pour t grand, la moyenne empirique des sauts (durées de vie) sur une branche donnée est proche de $E_G(X)$ d'après la loi des grands nombres. Les branches correspondant à des moyennes inférieures à $E_G(X)$ sont moins probables, mais ont eu le temps de proliférer plus. Il y a un phénomène de compensation dont le résultat est qu'asymptotiquement il y a $e^{\alpha t}W$ individus en vie à t. Sous certaines conditions W est une v.a. positive et α, appelé paramètre de Malthus est solution de :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, mG\,(dt) = 1 \qquad (2.1)$$

Ceci se démontre généralement en utilisant la théorie du renouvellement [25]. Nous lui préférons l'approche "grandes déviations" qui peut se résumer ainsi : si $X_1,\ldots,X_k,\ldots$ sont des v.a.i.i.d. de loi G, on pose $S_k = X_1 +\ldots+ X_k$ et soit $\beta>0$ donné. La contribution de la génération numéro $[t\beta^{-1}]$ à l'espérance de la population en vie à t, est, si t est grand, de l'ordre de :

$$m^{[t\beta^{-1}]}\, P(S_{[t\beta^{-1}]} \simeq t) = m^{[t\beta^{-1}]} \exp(-t\beta^{-1}\,[h_G(\beta) + o(1)])$$

$$= \exp\{t(-\beta^{-1} h_G(\beta) + \beta^{-1} \log m + o(1))\}$$

---

* *Ce chapitre a fait l'objet d'une note au C.R.A.S. [31] et sera prochainement publié [32].*

où $h_G(\beta) = \sup_\theta (\theta\beta - \log \int_o^\infty e^{\theta s} G(ds))$ est la transformée de Cramer [3] au point β. Les différentes exponentielles obtenues pour des β différents sont toutes "négligeables" par rapport à la plus grande $e^{\alpha' t}$ où :

$$\alpha' = - \inf_{\beta>0} (\beta^{-1} h_G(\beta) - \beta^{-1} \log m) \qquad (2.2)$$

Cet inf est atteint en $\beta_o = \int_o^\infty te^{-\alpha t} mG(dt)$ et $\alpha'=\alpha$. Les générations portant les numéros $t\beta_o^{-1} + o(t)$ sont prépondérantes car leurs espérances le sont et une "loi des grands nombres" joue. Le nombre β_o est l'âge moyen de procréation, connu en démographie [25].

Outre cette mise en évidence, l'avantage de cette approche est qu'elle s'étend à un cas plus général. A un individu y sont associés une durée de vie λ_y, un instant de naissance T_y et une position X_y. Sa descendance immédiate est décrite par une mesure ponctuelle ξ_y sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, donnant les instants de naissance et les positions de ses enfants calculés à partir de (T_y, X_y) pris comme origine. On construit un processus de branchement où tous les (λ_y, ξ_y) sont indépendants équidistribués. Etant donné $\varepsilon > 0$, le processus correspondant à ε est obtenu à partir d'un processus de référence en multipliant par ε les sauts et les durées de vie et en divisant par ε la fréquence des sauts. Dans ce modèle les sauts sur une ligne généalogique prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. L'échelle asymptotique du modèle de Bellman-Harris ($t \to \infty$) est remplacée par $\{(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon})$ où (t,x) sont fixés et $\varepsilon \to 0\}$.
Nous étudions $\zeta_t^\varepsilon(I)$, effectif de la population en vie à l'instant t située dans I, quand ε tend vers 0. Nous montrons en particulier que, si la loi de la durée de vie λ possède des moments exponentiels, on a, avec des conditions supplémentaires sur le processus ξ :

- si $\{t\} \times I$ coupe un certain cône ouvert alors
$$\varepsilon \ \text{Log}\ \zeta_t^\varepsilon(I) \xrightarrow{P} \sup_{x\in I} \alpha\ (t, x)$$
- si $\{t\} \times I$ ne coupe pas ce cône, alors presque sûrement
$\zeta_t^\varepsilon(I)$ est égale à zéro pour ε tendant vers 0.

La fonction α est homogène de degré 1 et vérifie des relations analogues à (2.1) et (2.2).

Nous traitons ici l'espace et le temps comme deux coordonnées de même nature, auxquelles nous appliquons les techniques de grandes déviations utilisées par Biggins ([9], [10], [11], [12]). Après la rédaction de cet article, nous avons

appris ([13]) que Biggins avait obtenu un résultat voisin (convergence p.s. mais avec durée de vie infinie) avec une démonstration et des perspectives différentes.

2.1.2. - Notations et hypothèses

Les notations de base sont dues à Jagers ([25] Chapitre 6). Nous rajoutons seulement une dimension spatiale sous la forme de l'analogue d'une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$. A un individu né à l'instant σ, situé en a, on associe un couple de v.a. (ξ,λ) où ξ est une mesure ponctuelle sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, de marginales ξ^1 et ξ^2, et λ une v.a. positive. λ représente sa durée de vie et ξ son processus de reproduction : les points de ξ donnent les instants de naissance et les positions des différents enfants, à partir de (σ, a) pris pour origine. On suppose que la loi de (ξ,λ) est indépendante de (σ, a) et que ξ a une intensité μ qui est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, permettant de définir à la fois pour f borélienne bornée et B borélien borné :

$$\int f(t,x)\, \mu(dt, dx) = E \int f(t,x)\, \xi(dt, dx) \quad \text{et} \quad \mu(B) = E\, \xi(B).$$

Nous faisons des hypothèses sur le processus et des hypothèses de type "grandes déviations" :

Hypothèses sur le processus :

(H1) $1 < m = \mu(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) < \infty$ (processus supercritique)

(H2) $P(\xi^1([0,\lambda] \geq 1) = 1$ (non extinction)

Notations :

Définissons les ensembles :

$$J_n = (\mathbb{N}^*)^n \quad ; \quad J = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right) \quad \text{avec } \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$$

J est l'ensemble potentiel des descendants de (0), y compris ce dernier. Le n-uplet $y = (i_1, \ldots, i_n)$ désigne l'individu étant le $i_n^{\text{ème}}$ enfant du $i_{n-1}^{\text{ème}}$ enfant du ... du $i_1^{\text{ème}}$ enfant de l'ancêtre (0). Définissons, pour $y \in J$, les ensembles :

$$J_n(y) = \{(y, z),\ z \in J_n\} \qquad J(y) = \{y\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n(y)\right).$$

J(y) est l'ensemble potentiel des descendants de y.

Posons $(\Omega, \mathcal{A}, P) = \prod_{y \in J} (\Omega_y, \mathcal{A}_y, P_y)$ où les $(\Omega_y, \mathcal{A}_y, P_y)$ sur lesquels on définit (ξ_y, λ_y) de même loi que (ξ, λ).

On définit par récurrence la notion de réalisation :

- 0 est réalisé
- (y,k) est réalisé si y est réalisé et $\xi_y(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \geq k$ où $k \in \mathbb{N}^*$

L'âge de y à la naissance de (y,k) est :

$$T_y(k) = \inf \{t,\ \xi_y^1([0,t]) \geq k\}.$$

Les différents points de ξ_y sont : $\{(T_y(k), X_y(k)),\ k \leq \xi_y^1(\mathbb{R}^+)\}$. La date de naissance et la position de $y = (i_1,\ldots,i_n)$ sont :

$$\begin{aligned} T(i_1,\ldots,i_n) &= T_o(i_1) + \ldots + T_{(i_1,\ldots,i_{n-1})}(i_n) \\ X(i_1,\ldots,i_n) &= X_o(i_1) + \ldots + X_{(i_1,\ldots,i_{n-1})}(i_n) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Nous dirons que y est réalisé si $T(y) < \infty$.
Désignons par R l'ensemble des individus "réalisés" descendant de (0) et $R(z)$ les descendants "réalisés" de z. La décomposition $R = \Sigma R_n$ est la décomposition en générations de la descendance totale.
Soit $A \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$; $\mathcal{N}(A)$ est l'ensemble des "nés dans A" décomposé suivant les générations en les $\mathcal{N}_n(A)$; $Z(A)$ et $Z_n(A)$ sont les cardinaux de ces ensembles.
Si T_y et X_y désignent l'instant et la position de naissance de y, on a :

$$\mathcal{N}_n(A) = \{y \in R_n\ ;\ (T,X)_y \in A\} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(A) = \{y \in R\ ;\ (T,X)_y \in A\}$$

$$Z_n(A) = \sum_{y \in R_n} \chi((T,X)_y \in A) \quad \text{et} \quad Z(A) = \sum_n Z_n(A).$$

En restreignant la sommation à $R_n(z)$, on obtient les descendants de z "nés dans A", notés $Z_n(A\ ;\ z)$ et $Z(A\ ;\ z)$.
Si λ_y désigne la durée de vie de y, si $t \in \mathbb{R}^+$ et $I \subset \mathbb{R}$, le nombre de "gens en vie dans I à l'instant t" est $\zeta_t(I)$.

$$\zeta_{t,n}(I) = \sum_{y \in R_n} \chi(X_y \in I,\ T_y \leq t < T_y + \lambda_y) \quad ; \quad \zeta_t(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_{t,n}(I)$$

Les descendants de z "en vie à t dans I" sont obtenus en sommant sur $y \in R_n(z)$ et notés $\zeta_{t,n}(I;z)$, $\zeta_t(I;z)$. Le processus indexé par ε est défini par :

$$\zeta^{\varepsilon}_{t,n}(I) = \zeta_{t/\varepsilon,n}(\frac{I}{\varepsilon}) \qquad \text{et} \qquad \zeta^{\varepsilon}_{t}(I) = \zeta_{t/\varepsilon}(\frac{I}{\varepsilon}).$$

On désignera par $\mathcal{F}_n$ la σ-algèbre engendrée par les n première générations, non compté leur temps de vie. De la définition de Z_n et de (2.3), on déduit :

$$EZ_n(A) = \mu^{*n}(A), \qquad (n^{\text{ème}} \text{ puissance de convolution}) \qquad (2.4)$$

Pour faire des grandes déviations, et afin d'éviter des problèmes de frontière non essentiels ici, nous faisons des

Hypothèses de "grandes déviations"

(H3) Si C est l'enveloppe convexe fermée du support de μ, alors
$C \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $\mu(\partial C) = 0$ (a) (ce qui implique $\mathring{C} \neq \emptyset$)

(H4) $\forall\, \theta \in \mathbb{R}^2 \qquad L(\theta) = \text{Log} \int e^{<\theta,y>}\, \mu(dy) < \infty$ (b)

(H5) $\forall\, \eta \in \mathbb{R} \qquad \hat{G}(\theta) = \int e^{\theta t}\, G(dt) < \infty$

On définit la transformée de Cramer h de la mesure μ par :

$$h(y) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^2} (<\theta, y> - L(\theta)) \qquad \text{où} \quad y \in \mathbb{R}^2$$

La fonction h a les propriétés suivantes ([3]) :

- h est s.c.i., convexe, finie et analytique sur $\mathring{C}$, infinie sur ∂C et C^c.
- l'application $\theta \to L'(\theta)$ est un diffeomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathring{C}$. De plus pour tout $y \in C^\circ$, on a :

$$h(y) = <\theta, y> - L(\theta) \qquad \text{où } \theta = h'(y) \text{ (c)}$$

car θ est la solution unique de l'équation $L'(\theta) = y$. (c)

(a)- C°, ∂C, $\bar{C}$ et C^c sont respectivement l'intérieur, la frontière, la fermeture et le complémentaire de C.

(b)- $<\theta, y>$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

(c)- La dérivée d'une fonction f, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $f'(y)$, est identifiée au vecteur de $\mathbb{R}^2$ $(f'_1(y), f'_2(y))$ où f'_i désigne la dérivée partielle de f selon la $i^{\text{ème}}$ coordonnée.

Convention : nous dirons alors que y et θ sont en dualité (2.5).

Le minimum de h est obtenu pour $\theta = (0,C)$, il vaut $-L(0) = -\text{Log } m$, (négatif sous (H1)) ; il est atteint au barycentre de la mesure μ, de coordonnées :

$$t_m = \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}^2} t\mu\,(dy), \qquad x_m = \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}^2} x\mu\,(dy) \qquad \text{où } y = (t,x)$$

Les hypothèses (H3) et (H4) assurent que $h(y) = +\infty$ si $y \in \partial C$ (cf.[5] p. 11). Or h est s.c.i. donc $h(y') \to +\infty$ quand $(y' \to y \in \partial C$ en restant dans $\mathring{C})$. En particulier l'origine de $\mathbb{R}^3$ est extérieure au convexe $\mathcal{K} = \{(t,x,z);z \geq h(t,x)\}$. On définit encore les ensembles :

$$\mathcal{C} = \{y \in \mathbb{R}^2 \,/\, \exists \beta > 0 \qquad \beta y \in \mathring{C}\} = \mathbb{R}^{+*}\cdot\mathring{C}$$

$$\mathcal{J} = \{y \in \mathbb{R}^2 \,/\, \exists \beta > 0\,, \quad h(\beta y) < 0\}. \quad \text{(sous (H1) } \mathcal{J} \text{ est non vide)}$$

ainsi que la fonction : $\alpha(y) = -\inf_{\beta>0} \frac{1}{\beta} h(\beta y)$ (2.6)

2.1.3. - Résultats préliminaires

Théorème 2.1. :

Sous les hypothèses (H1), (H3), (H4), il existe sur $\mathcal{C}$ une fonction β a valeurs positives telle que : $\beta(y)\,\alpha(y) = -h(\beta(y)\,y)$, α est homogène de degré 1, β homogène de degré -1 ; elles sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifient :

$$L(-\alpha'(y)) = 0 \qquad (2.7)$$

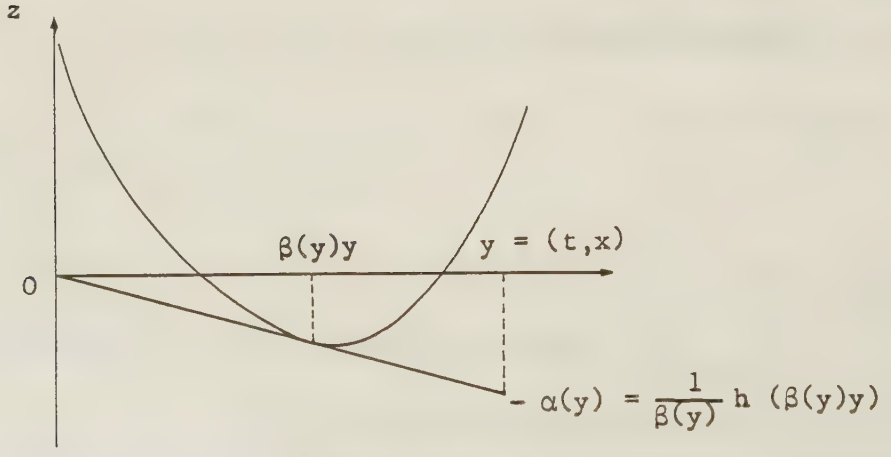


Figure 2.1.

Démonstration :

Sur $\mathcal{C}$, h est finie de sorte que la fonction $\beta \to \frac{1}{\beta} h(\beta y)$ a un minimum à distance finie, comme la figure 2.1 l'indique, car la fonction h est convexe et infinie aux deux extrêmités de $\mathbb{R}^{+*}\cdot y$. La tangente issue de l'origine réalise donc la pente minimum en un point d'abscisse $\beta(y)y$. avec β solution de :

$$h(\beta(y)y) = \langle \beta(y)\, y, h'(\beta(y)\, y)\rangle$$

ou encore, en utilisant la dualité :

$$L(h'(\beta(y)\, y)) = 0$$

La fonction α s'écrit alors :

$$\alpha(y) = -\frac{1}{\beta(y)} h(\beta(y)y) = -\langle y, h'(\beta(y)y)\rangle$$

Par construction même, la fonction $y \to \beta(y)$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^+$ est homogène de degré -1 et par conséquent α est homogène de degré 1. La fonction β est C^∞ d'après le théorème des fonctions implicites, donc α est C^∞ et, d'après l'identité d'Euler, on a :

$$\alpha(y) = \langle y, \alpha'(y)\rangle$$

Cette égalité, jointe aux deux précédentes conduit à (2.7).

Par ailleurs, des hypothèses (H1), (H2), on déduit immédiatement les deux inégalités fondamentales :

Principe d'exclusion : Deux individus différents de la même génération ont des descendances distinctes :

$$\forall n,t,I \qquad \sum_{y\in J(n)} \zeta_t(I\,;\,y) \le \zeta_t(I) \tag{2.8}$$

Non extinction p.s. : Tout individu a au moins un enfant avant sa mort :

$$\forall y,t \qquad \chi(T(y) \le t) \le \zeta_t(\mathbb{R}\,;\,y) \tag{2.9}$$

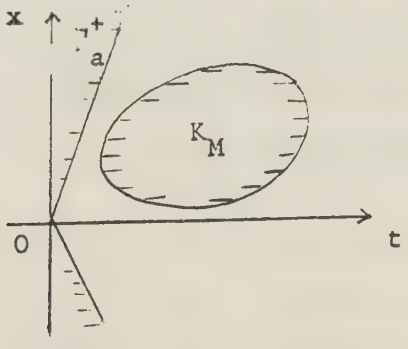
Des hypothèses (H3), (H4) on déduit le lemme :

Lemme 2.2.

Soient Γ_a^+ et Γ_a^- les deux cônes du demi-espace $\{(t,x);x \ge at\}$ et $\{(t,x);x \le -at\}$ où $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et soit $\underline{H}(a) = \inf_{\Gamma_a^+ \cup \Gamma_a^-} h(t,x)$. Alors on a :

$$\lim_{a\to+\infty} \underline{H}(a) = +\infty \tag{2.10}$$

Démonstration



Soit $K_M = \{y; h(y) \leq M\}$. K_M est compact puisque convexe fermé borné dans toutes les directions (puis Banach-Steinhaus). L'intersection de K_M et de $\{0\} \times \mathbb{R}$ est vide (car $\{0\}\times\mathbb{R} \subset (\mathring{C})^c$). Par conséquent il existe a tel que $K_M \cap (\Gamma_a^+ \cup \Gamma_a^-) = \emptyset$.

2.2. - ENONCE DU THEOREME

Nous présentons dans cette partie le théorème incipal ainsi que les outils qui seront fondamentaux dans la démonstration.

Théorème 2.3. :

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, la variable aléatoire $\zeta_t^\varepsilon(I)$ vérifie(a):

(i) (sous (H1),(H3),(H4),(H5)), si $\{t\} \times I \subset (\mathcal{S})^c$, alors presque sûrement pour ε suffisamment petit, $\zeta_t^\varepsilon(I)$ est identiquement nul.

(ii) si de plus (H2) est vérifiée, ainsi que l'hypothèse suivante :

$$(H6) : \exists K > 1 \quad \forall\theta \quad E g_K \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{\langle\theta,y\rangle}\, \xi(dy)\right) < \infty$$

où $g_K(x) = x.\ (0 \vee \log x)^K$ pour $x > 0$

alors, si $\{t\} \times I \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, la variable ε Log $\zeta_t^\varepsilon(I)$ tend en probabilité vers $\sup_{x\in I} \alpha(t,x)$ quand ε tend vers 0.

La démonstration utilise d'abord une majoration en espérance de $\zeta_t^\varepsilon(I)$ obtenue avec des encadrements de Cramer-Chernoff pour $Z_n(A)$. Le résultat (i) se déduit de cette majoration qui met en évidence la présence d'une génération prépondérante $n_\varepsilon(t,x) \simeq [(\varepsilon\beta(t,x))^{-1}]$ d'où provient l'essentiel de la population en vie à t au voisinage de x (point de I où le sup α est atteint). La démonstration en probabilité se fait en minorant $\zeta_t^\varepsilon(I)$ par le nombre des personnes de la génération $n_\varepsilon(t,x)$ nés dans un rectangle bien choisi du temps x espace, et en montrant que leur descendance, en probabilité, ne peut être située "loin" des positions des parents (dans un sens à préciser), enfin en utilisant le principe de la génération intermédiaire.

(a)- Comme dans tous les processus de branchement il y a alternative entre extinctio et croissance exponentielle ($\alpha>0$ sur $\mathcal{S}$).

2.2.1. - Encadrements de Cramer-Chernoff

- Changement de mesure

Soit y et θ en dualité suivant (2.5). Posons :

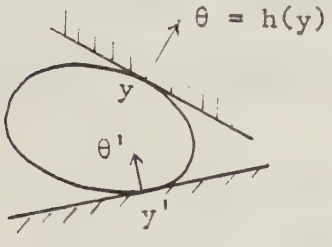
$$\mu_\theta \ (dz) = \exp (<\theta, z> - L (\theta)) \ \mu \ (dz).$$

C'est une probabilité de transformée de Laplace analytique valant en s : $\exp (L (\theta+s) - L(\theta))$. Le moment du premier ordre s'obtient par dérivation et vaut $L'(\theta) = y$. La variance est finie égale au Hessien de L et de rang plein (car $C^\circ \neq \emptyset$).

On appelle $\bar{\mu}_\theta$ la probabilité centrée d'expression.

$$\bar{\mu}_\theta(dz) = \exp (<\theta, y+z> - L(\theta)) \ \mu(y+dz) = e^{h(y)} . e^{<\theta,z>} . \mu(y+dz).$$

Soit B un convexe borné dans C°, le sup et l'inf sur B sont pris en y et y', tous les deux sur le bord de B (sauf si B contient le point minimum de h, mais alors la majoration est triviale). Soient θ et θ' leurs duaux. Si $u \in B$, on a : μ p.p., $<\theta', u-y'> \geq 0$ et $<\theta , u-y> \leq 0$



On a par exemple :

$$\mu^{*n} \ (nB) = \int_{\Sigma z_i \in n(B-y)} e^{-nh(y)} \ e^{-<\theta, \Sigma z_i>} \ \prod_i \ \bar{\mu}_\theta \ (dz_i) \qquad \text{et donc :}$$

$$e^{-nh(y)} \ \bar{\mu}_\theta^{*n} \ (n(B-y)) \leq \mu^{*n} \ (nB) \leq e^{-nh(y')} \ \bar{\mu}_{\theta'}^{*n} \ (n(B-y')) \qquad (2.11)$$

En fait la majoration est vraie quand B contient le minimum (m^n majore toujours $\mu^{*n}(\mathbb{R}^2)$) :

$$\mu^{*n} \ (nB) \leq \exp (- nH(B)) \quad \text{où} \quad H(B) = \inf_{y \in B} \ h(y) \qquad (2.12)$$

- Changement de processus ponctuel

Définissons à partir de Z_n et de θ, un nouveau processus ponctuel $Z_{\theta,n}$ tel que, si B est un borélien borné de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on ait :

$$Z_{\theta,n} \ (B) = \sum_{z \in R_n} \chi \ ((T,X)_z \in B) \ e^{<\theta,(T,X)_z> - nL(\theta,\eta)}$$

Si B est un convexe fermé de $\overset{\circ}{C}$, on a :

$$e^{-nh(y)} \bar{Z}_{\theta,n}(n,B) \leq Z_n(nB) \leq e^{-nh(y')} \bar{Z}_{\theta',n}(nB). \qquad (2.13)$$

2.2.2. - Majoration de $E\ \zeta_t^\varepsilon(I)$

Proposition 2.4. :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors on a, sous (H3), (H4), (H5), pour tout t :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup\ \varepsilon \operatorname{Log} E\ \zeta_t^\varepsilon(I) \leq \sup_{x \in I} \alpha(t,x)$$

Démonstration

Notons, pour $0 < \tau \leq t$, $B_\tau = [t-\tau, t] \times I$. Il est facile de voir que, pour tous n, t, τ, ε, on a les inégalités :

$$\zeta^\varepsilon_{t,n}(I) \leq Z_n(\varepsilon^{-1} B_t) \quad , \quad \zeta^\varepsilon_{t,n}(I) \leq Z_n(\varepsilon^{-1} B_\tau) + \sum_{y \in R_n} \chi(\lambda_y > \varepsilon^{-1}\tau)$$

Soit N un entier positif, que nous préciserons ultérieurement. On déduit des définitions que :

$$E\ \zeta_t^\varepsilon(I) \leq \sum_0^N EZ_n(\varepsilon^{-1} B_\tau) + \sum_0^N m^n P(\lambda > \varepsilon^{-1}\tau) + \sum_{N+1}^\infty EZ_n(\varepsilon^{-1} B_t)$$

Or, pour tout $d > 0$, on a : $P(\lambda > \varepsilon^{-1}\tau) \leq \hat{G}(d) \exp(-d\tau\varepsilon^{-1})$. Par conséquent, en utilisant (2.4) on obtient :

$$E\ \zeta_t^\varepsilon(I) \leq \sum_0^N \mu^{*n}(\varepsilon^{-1} B_\tau) + \sum_{N+1}^\infty \mu^{*n}(\varepsilon^{-1} B_t) + (m-1)^{-1} m^{N+1} \hat{G}(d) \exp(-d\tau\varepsilon^{-1})$$

D'après (2.12), on a l'inégalité :

$$E\ \zeta_t^\varepsilon(I) \leq \sum_0^N \exp(-nH(n^{-1}\varepsilon^{-1} B_\tau)) + \sum_{N+1}^\infty \exp(-nH(n^{-1}\varepsilon^{-1} B_t))$$
$$+ (m-1)^{-1} m^{N+1} \hat{G}(d) \exp(-d\tau\varepsilon^{-1})$$

(H3) et (H4) impliquent que $\lim_{y \to (0,0)} h(y) = +\infty$, donc pour tout $r>0$, on peut trouver k_o tel que, pour $k>k_o$, on ait $H(k^{-1} B_t) \geq r$. Choisissant $N = [k_o \varepsilon^{-1}]$, on obtient :

$$\sum_{N+1}^\infty \exp(-n H(n^{-1}\varepsilon^{-1} B_t)) \leq \sum_{N+1}^\infty e^{-nr} = O(e^{-Nr})$$

Pour majorer $\sum_0^N \exp(-n H(n^{-1}\varepsilon^{-1} B_\tau))$, on écrit pour $n \neq 0$:

$$nH(n^{-1}\varepsilon^{-1} B_\tau) \geq \varepsilon^{-1} \inf_n (n\varepsilon \inf_z h(\tfrac{z}{n\varepsilon}))$$

$$\geq \varepsilon^{-1} \inf_{z \in B_\tau} -\alpha(z) \qquad (2.14)$$

Pour $n=0$, on a : $EZ_o^{B_\tau}(\frac{}{\varepsilon}) = 0$, dès que $0 < \tau < t$.

Le regroupement de ces inégalités conduit à :

$$E\zeta_t^\varepsilon(I) \leq k_o\, \varepsilon^{-1} \exp\left(\varepsilon^{-1} \sup_{z\in B_\tau} \alpha(z)\right) + (m-1)^{-1}\, \hat{G}(d) \exp\left(\varepsilon^{-1}(k_o \log m - d\tau)\right) + O\left(e^{-\frac{k_o}{\varepsilon} r}\right)$$

Trois cas se présentent :

- $\{t\} \times I \cap \mathcal{C} = \emptyset \qquad \sup_{\{t\}\times I} \alpha(z) = -\infty$

  Il existe τ tel que $B_\tau \cap \mathcal{C} = \emptyset$

  Par conséquent, à tout $A>0$, on peut associer $r>A$ puis d tels que

  $\varepsilon \operatorname{Log} E\zeta_t^\varepsilon(I) < -A$

  $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \operatorname{Log} E\, \zeta_t^\varepsilon(I) = -\infty$

  Le résultat est démontré.

- $\{t\} \times I \cap (\mathcal{C} - \mathcal{J}) \neq \emptyset \qquad -\infty < \sup_{\{t\}\times I} \alpha(z) < 0$

  r est choisi tel que $0 < -\sup_{\{t\}\times I} \alpha(z) < r < +\infty$.

  La fonction α étant continue sur $\mathcal{C}$, on peut trouver τ tel que

  $$-\sup_{B_\tau} \alpha(z) < r$$

- $\{t\} \times I \cap \mathcal{J} \neq \emptyset \qquad \sup_{\{t\}\times I} \alpha(z) > 0$

  r est choisi strictement positif arbitraire.

Dans les deux derniers cas, le choix $(d > \tau^{-1} k_o \operatorname{Log} m)$ conduit dès que τ est suffisamment petit, à :

$$\overline{\lim}\ \varepsilon \operatorname{Log} E\zeta_t^\varepsilon(I) \leq \sup_{B_\tau} \alpha(z)$$

On déduit de la continuité de α sur $\mathcal{C}$ le résultat recherché.

Tout se passe comme si on n'avait gardé que les entiers n réalisant presque l'égalité dans (2.14), c'est-à-dire, compte tenu du théorème 1, les entiers $n_\varepsilon = \beta(t,x)^{-1}\, \varepsilon^{-1} + o(\varepsilon^{-1})$ où x est un point de I où $\sup_{v\in I} \alpha(t,v)$ est réalisé.

2.3. - DEMONSTRATION DU THEOREME

2.3.1. - Démonstration de (i)

Associons à ε l'entier $k_\varepsilon = 1 + [\frac{1}{\varepsilon}]$ et posons $I'_\varepsilon = \varepsilon k_\varepsilon I$. Pour tout ε, on a les inclusions :

$$I \subset I'_\varepsilon \subset (2\varepsilon + 1)\, I.$$

Par conséquent, si $\{t\} \times I \subset (\overline{\mathcal{V}})^c$, il existe τ $0 < \tau < t$ et ε_o tels que pour $\varepsilon < \varepsilon_o$, on ait :

$$B'_\tau = [t-\tau, t] \times I'_\varepsilon \subset (\overline{\mathcal{V}})^c \quad \text{et} \quad \{t\} \times I \subset \varepsilon k_\varepsilon B'_\tau.$$

On obtient la majoration, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_o$, τ et N :

$$\zeta^\varepsilon{}_t(I) \leq \rho_\varepsilon = \sum_1^N Z_n\,(k_\varepsilon B'_\tau) + \sum_0^N \sum_{y \in \mathcal{R}(n)} \chi\,(\lambda_y > k_\varepsilon \tau) + \sum_{N+1}^{\infty} Z_n(k_\varepsilon B'_t)$$

L'entier N sera choisi de la forme $\frac{M}{\varepsilon}$. En reprenant les calculs de la démonstration de la proposition 2.3., on obtient :

$$E\,\rho_\varepsilon \leq N\, e^{-k_\varepsilon C_2} + \frac{m^{N+1}}{(m-1)}\, \hat{G}(d)\, \exp\,(-\, d k_\varepsilon\, \tau) + 0\,(e^{-Nr})$$

où $C_2 = \inf_{z \in B'_\tau} (-\alpha\,(z)) > 0$ car $B'_\tau \subset (\overline{\mathcal{V}})^c$

$N = k_o\,(1 + [\frac{1}{\varepsilon}])$ (k_o est associé à $r > 0$ comme précédemment)

$d > \dfrac{k_o \operatorname{Log} m}{\tau}$

Ainsi, quand ε tend vers 0, $E\rho_\varepsilon$ tend vers 0. La variable ρ_ε est entière positive, par conséquent il existe ε_o tel que pour $\varepsilon < \varepsilon_o$, ρ_ε soit nulle presque sûrement (Borel-Cantelli). Il en va de même pour $\zeta^\varepsilon{}_t(I)$, variable entière majorée par ρ_{k_ε}.

2.3.2. - Démonstration de (ii)

Posons $\alpha = \sup_{x \in I} \alpha\,(t,x)$. La majoration (i) et l'inégalité de Cebicev entraînent que, pour tout $\delta > 0$, on a :

$$P\,(\varepsilon \operatorname{Log} \zeta^\varepsilon_t(I) > \alpha + \delta) \leq e^{-\frac{\alpha+\delta}{\varepsilon}}\, E\, \zeta^\varepsilon_t(I)$$

Ce dernier terme tend vers 0 quand ε tend vers 0. Il suffit donc de montrer que, si $\{t\} \times I \cap \mathcal{Y} \neq 0$, on a pour tout $\delta > 0$:

$$P\ (\zeta_t^{\varepsilon}(I) < e^{\frac{\alpha-\delta}{\varepsilon}}) \to 0 \qquad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.15}$$

Lemme 2.5. :

Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \subset I_2$ et soit A un borélien de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ inclus $[t-h, t] \times I_1$. Alors :

$$\zeta_t(I_2) \geq [Z_n(A) - \sum_{y \in \mathcal{N}_n(A)} \zeta_t\ (I_2^c\ ;\ y)]\ \chi\ (Z_n(A) > 0)$$

Démonstration :

Soit y appartenant à $\mathcal{N}_n(A)$. Alors $T(y) \leq t$ et donc d'après (2.9)

$$1 \leq \zeta_t\ (\mathbb{R}\ ;\ y) = \zeta_t\ (I_2\ ;\ y) + \zeta_t\ (I_2{}^c\ ;\ y)$$

D'où on tire, en utilisant (2.8), l'inégalité :

$$Z_n(A) \leq \zeta_t(I_2) + \sum_{y \in \mathcal{N}_n(A)} \zeta_t\ (I_2{}^c\ ;\ y)$$

Considérons le point x où le sup $\alpha(t,x)$ est atteint ; ce point appartient à $\mathcal{Y}$. Deux cas sont possibles :

- $x \in I^o$ (ceci contient le cas où $\alpha(t,x)$ est constante sur I)
- x est un bord de I. Il existe alors $x' \in I^o$ tel que $\alpha - \alpha(t,x') = \delta'$ arbitrairement petit. Pour démontrer (2.15) il suffit de montrer que :

$$P\ (\zeta_t^{\varepsilon}(I) < e^{\frac{\alpha(t,x') - \delta}{\varepsilon}}) \to 0 \qquad \text{où} \quad x' \in I^o$$

Il est loisible de supposer désormais que $x \in \mathring{I}$.

Associons à ce point x de $\mathring{I}$, les intervalles I_x, J_x :

$$I_x = [x - \varepsilon V,\ x + \varepsilon V] \qquad J_x = [x - \varepsilon(V+W),\ x + \varepsilon(V+W)]$$

où V, W dépendent de ε et sont tels que $\varepsilon V \to 0$, $\varepsilon W \to 0$.

Nous allons montrer que :

$$P\left(\zeta_t^{\varepsilon}(J_x) < e^{\frac{\alpha(t-x)-\delta}{\varepsilon}}\right) \to 0$$

Pour ε petit, on a $J_x \subset I$, ce qui implique $\zeta_t^{\varepsilon}(J_x) \leq \zeta_t^{\varepsilon}(I)$. On obtient alors (2.15).

Appliquons le lemme 2.5 à I_x, J_x, $D_x = [\frac{t}{\varepsilon} - U, \frac{t}{\varepsilon}] \times \frac{I_x}{\varepsilon}$. Pour tout n, $k > 0$, et δ' tel que $0 < \delta' < 1$, l'inclusion suivante est vérifiée :

$$\{\zeta_t^{\varepsilon}(J_x) < k\} \subset \{Z_n(D_x) < \frac{k}{1-\delta'}\} \cup \{(Z_n > 0) \cap \Big(\sum_{y \in \mathcal{N}_n(D_x)} \zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(\frac{J_x^c}{\varepsilon} ; y) > Z_n(D_x)\ \delta'\Big\}$$

ce qui conduit à : $P\left(\zeta_t^{\varepsilon}(J_x) < e^{\frac{\alpha-\delta}{\varepsilon}}\right) \leq A_n + B_n$

$$A_n = P\left(Z_n(D_x) < \frac{e^{\frac{\alpha(t-x) - \delta}{\varepsilon}}}{1 - \delta'}\right)$$

$$B_n = P\left(\{Z_n(D_x) > 0\} \cap \Big\{\sum_{y \in \mathcal{N}_n(D_x)} \zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(\frac{J_x^c}{\varepsilon} ; y) > \delta' Z_n(D_x)\Big\}\right)$$

Nous montrerons que la probabilité B_n tend vers 0 avec n et ε et que la probabilité A_n est petite si $n = n_{\varepsilon} = [\frac{1}{\beta(t,x)\varepsilon}]$, $(t,x) \in$, et U, V, W bien choisis.

- Majoration de B_n

Conditionnons par $\mathcal{F}_n$

$$P^{\mathcal{F}_n}(\ldots) \leq \chi(Z_n(D_x)>0)\ \frac{1}{\delta' Z_n(D_x)} \sum_{y \in \mathcal{N}_n(D_x)} E^{\mathcal{F}_n} \zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(\frac{J_x^c}{\varepsilon} ; y)$$

Or conditionnellement à $\mathcal{F}_n$ la variable $\zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(\frac{J_x^c}{\varepsilon} ; y)$ a la même loi que $\zeta_{\frac{t}{\varepsilon}} - T_y(\frac{J_x^c}{\varepsilon} - X_y)$. D'où on tire :

$$P^{\tilde{\mathcal{F}}_n}(\ldots) \le \frac{1}{\delta}, \sup \{E\,\zeta_u\,(\frac{J_x^c}{\varepsilon} - z)\ ;\ z \in \frac{I_x}{\varepsilon}\ ;\ 0 \le u \le U\}$$

B_n est donc majoré par le deuxième membre de cette inégalité.

Pour tout u, on a :

$$E\,\zeta_u\,(\frac{J_x^c}{\varepsilon} - z) \le \sum_{n\ge 1} EZ_n\,([0,u] \times \{\frac{J_x^c}{\varepsilon} - z\},$$

car pour ce rectangle Z_o est nul (0 ne lui appartient pas). Or, tout couple (u,z) tel que $0 \le U$ et $z \in \frac{I_x}{\varepsilon}$ vérifie :

$$[0,u]\times \{\frac{J_x^c}{\varepsilon} - z\} \subset [0,U] \times\{|z| > W\} \subset \Gamma_a^- \cup \Gamma_a^+ \qquad \text{avec } a = \frac{W}{U}$$

Une application du lemme 2.2 conduit à :

$$E\zeta_u\,(\frac{J_x^c}{\varepsilon} - z) \le \sum_{n\ge 1} \exp\,(-n\underline{H}(a)) \le \frac{1}{2\underline{H}(a)} \qquad \text{si } H(a) > 0.$$

On sait que $\underline{H}$ tend vers $+\infty$ avec son argument en croissant. Il suffit donc de W et U vérifient $(\frac{W}{U} \to +\infty)$ pour assurer $(B_n \to 0)$.

- Majoration de $A_n = P\,(Z_n(D_x) \le e^{\frac{\alpha(t,x)-\delta+o(1)}{\varepsilon}})$ où $n = n_\varepsilon = [\frac{1}{\beta(t,x)\varepsilon}]$

Pour recentrer le problème nous procédont à un changement de processus ponctuel (cf. (2.2.1))

$$\bar{Z}_{\theta,n}(B) = \sum_{y\in R_n} \chi\,(T,X)_y \in B)\, e^{<\theta,(T,X)_y> - n\,L(\theta,\eta)}$$

On choisit $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ en dualité avec (t,x). On déduit de (2.13) :

$$\bar{Z}_{n_\varepsilon}(D_x) \le e^{n_\varepsilon h(y_\varepsilon)}\, Z_{n_\varepsilon}(D_x) \qquad \text{où } y_\varepsilon = \sup_{z\in\frac{D_x}{n_\varepsilon}} h(z).$$

Or $\frac{D_x}{n_\varepsilon} \subset \varepsilon\,\beta\,(t,x)\,D_x = \beta\,(t,x)\,[t-\varepsilon U, t] \times I_x$

Par conséquent : $\sup_{z\,\in\,\frac{D_x}{n_\varepsilon}} (h(z) \le h\,(\beta(t,x)\,t, \beta(t,x)\,x) + \varepsilon\sqrt{\theta_1^2 U^2 + \theta_2^2\,V^2}$

D'où on tire : $\bar{Z}_{n_\varepsilon}(D_x) \le e^{-\frac{\alpha(t,x)}{\varepsilon} + o\,(||(U,V)||)}\, Z_{n_\varepsilon}(D_x).$

Nous choisirons U et V de façon que $\sqrt{U^2 + V^2} = o(\frac{1}{\varepsilon})$. Il suffit d'imposer $(\varepsilon V \to 0, \varepsilon U \to 0)$ Il reste à montrer que, si $\delta_\varepsilon = \exp(-\frac{\delta}{\varepsilon} + o(\frac{1}{\varepsilon}))$:

$$P_\varepsilon = P(\bar{Z}_{n_\varepsilon}(D_x) \leq \delta_\varepsilon) \to 0 \qquad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.16}$$

Nous allons appliquer maintenant la méthode de la génération intermédiaire ([28], [11]). L'essentiel des calculs se trouve déjà dans [11], avec une seule dimension. Le contexte est ici un peu différent : le rôle joué par T ne permet pas d'espérer une convergence p.s. avec cette méthode ; nous utiliserons donc une approximation uniforme par la loi normale et non un théorème limite local, ce qui simplifie les calculs.

Soit s un entier strictement inférieur à n_ε, destiné à tendre vers l'infini mais moins vite que n_ε. On a la décomposition :

$$\bar{Z}_{n_\varepsilon}(D_x) = \sum_{z \in R_s} a_z \bar{Z}_{n_\varepsilon - s}(D_x - (T,X)_z \; ; \; z) \tag{2.17}$$

où conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, les $\bar{Z}_{n_\varepsilon - s}(\cdot ; z)$ pour $z \in R_s$ sont des copies indépendantes de $\bar{Z}_{n_\varepsilon - s}(\cdot)$ et $a_z = \exp(\langle \theta, (T,X)_z \rangle - sL(\theta))$. (il suffit en effet d'écrire $\sum_{y \in R_n} = \sum_{z \in R_s} \sum_{y \in R_{n-s}(z)}$ et d'appliquer (2.3). Définissons pour $z \in R_s$:

$$b_z = \mu_\theta^{*(n_\varepsilon - s)}(D_x - (T,X)_z)$$

$$V_z = \bar{Z}_{\theta, n_\varepsilon - s}(D_x - (T,X)_z) - b_z$$

$$\tilde{V}_z = V_z \, \chi(a_z |V_z| < 1)$$

Conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, b_z est l'espérance de $\bar{Z}_{n_\varepsilon - s}(D_x - (T,X)_z)$, et les V_z sont centrées, indépendantes des b_z.

Dans ce qui suit, les sommations qui ne sont pas précisées sont faites sur $z \in R_s$. On a l'inégalité :

$$P_\varepsilon \leq P(\Sigma a_z b_z \leq p) + P(\Sigma a_z V_z \leq \delta_\varepsilon - p) \qquad \forall \; p > 0$$

Le nombre p sera choisi de façon que $p\delta_\varepsilon^{-1} \to \infty$. Cette dernière probabilité sera petite, car si $(t,x) \in \mathcal{S}$, le nombre des personnes de la $s^{\text{ième}}$ génération est grand, une loi des grands nombres joue et $\bar{Z}_{\theta, n_\varepsilon - s}(D_x - (T,X)_z)$ est proche de son espérance conditionnelle b_z.

Tronquons les variables V_z :

$$P_\varepsilon \leq P\ (\Sigma\ a_z\ b_z \leq p) + P\ (\Sigma\ a_z\ \tilde{V}_z \leq \delta_\varepsilon - p) + P\ (\Sigma\ a_z\ V_z \neq \Sigma\ a_z\ \tilde{V}_z).$$

$$P_1 \quad + \quad P_2 \quad + \quad P_3 \qquad (2.18)$$

Majoration de P_1

Nous utiliserons un lemme de "Berri-Eessen" assurant une minoration des b_z.

Lemme 2.6. :

Soit ν une probabilité sur $\mathbb{R}^2$ centrée de covariance régulière et 3ème moment fini et k_n une suite d'entiers telle que $k_n \to \infty$ et $\frac{k_n}{n} \to 1$. Soit enfin C_n une suite de rectangles $I_n \times J_n$ contenant 0 tels que $I_n = n^\alpha$, $J_n = n^\beta$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$, $\beta > \frac{1}{2}$. Alors il existe des constantes $K_1, K_2 > 0$, telles que, pour tout $y \in \mathbb{R}^2$:

$$\nu^{*k_n}\ (C_n - y) \geq K_1 - \frac{K_2}{\sqrt{n}}\ ||y||_2$$

Démonstration :

Appliquons à ν un résultat classique de Berri-Eessen dans $\mathbb{R}^2$ [7].

$$\nu^{*k_n}\ (C_n - y) = \Phi_\nu\ (k_n^{-1/2}\ (C_n - y)) + 0\ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

où Φ_ν est la loi gaussienne de $\mathcal{N}\ (0, \text{cov}\ \nu)$. Or $\Phi_\nu(R) = \int_R e^{-1/2\ Q(x)}\ dx$ où Q forme quadratique définie positive associée à $\mathcal{N}\ (0, \text{cov}\ \nu)$. Par conséquent on a l'inégalité :

$$|\Phi\ (R+y) - \phi\ (R)| \leq \lambda(R)\ ||y||_2\ K_1$$

où K_1 est un majorant sur $\mathbb{R}^2$ de la dérivée de la fonction $e^{-1/2\ Q(x)}$, et $\lambda(R)$ est la mesure du rectangle R.

D'où on tire :

$$\phi_\nu\ (k_n^{-1/2}\ (C_n - y) \geq \Phi_\nu\ (k_n^{-1/2}\ C_n) - K_1\ k_n^{-3/2}\ \lambda\ (C_n)\ ||y||_2$$

Le rectangle $k_n^{-1/2} C_n$ contient 0, son aire $\lambda(C_n)$ est minorée par $K_2 n$, et aucune de ses dimensions ne tend vers 0. D'où :

$$\Phi_\nu (k_n^{-1/2} C_n) \geq K_2$$

Appliquons ce lemme à la minoration de b_z, sous réserve que U et V vérifient les conditions du lemme 2.6. La loi μ_θ est d'espérance $(\beta t, \beta x)$ et de covariance régulière égale à $L''(\theta,\eta)$ qui est de rang plein car $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$. On choisit

$$C_{n_\varepsilon} = D_x - (\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}) \; ; \; y = n_\varepsilon (t,x)\, \beta - (\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}) - (T(z) - st\beta, X(z) - s\, x\beta)$$

$$b_z \geq (K_1 - \varepsilon^{1/2} K_2 \, ||y||_2) \geq K_1 - \varepsilon^{1/2} K_2 \, ||T(z) - st\beta, X(z) - sx\beta||_2 - \varepsilon^{1/2} K_3$$

car $||y||_2 \leq \beta \sqrt{x^2+t^2} \; ||T(z) - st\beta, X(z) - sx\beta||_2$

Par conséquent, P_1 est majorée par :

$$P_1 \leq P\,(K'_1 \Sigma a_z < 2p) + P\,(K_2 \varepsilon^{1/2} \Sigma a_z || \, T(z) - st\beta, X(z) - sx\beta||_2 > p)$$

Or Σa_z est, par construction, égal à $\bar{Z}_s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, qui, en tant que martingale
$z \in J(s)$
positive ([2], p. 248) a une limite p.s. Il est facile de montrer que, sous l'hypothèse (H3), cette limite n'a pas de masse en 0 et donc le premier terme de la majoration de P_1 tend vers 0 pourvu que s tende vers l'infini et que $p \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Posons $Y_z = (T(z) - st\beta, X(z) - sx\beta)$.

$$P\,(\Sigma a_z ||Y_z||_2 > \frac{p}{K_2} \varepsilon^{-1/2}) \leq \frac{K_2}{p} \varepsilon^{1/2} E\,(\Sigma a_z ||Y_z||_2) = O\,(p^{-1} (\varepsilon s)^{1/2})$$

En effet $\Sigma a_z ||Y_z||_2$ vérifie :

$$E\,(\Sigma a_z ||Y_z||_2) = \int [u-st\beta)^2 + (v-sx\beta)^2]^{1/2} \, \mu_\theta^{*s}(du,dv) \leq (\mathrm{Var}\, \mu^{*s})^{1/2}$$

$$\leq K s^{1/2}.$$

Pour majorer P_2 et P_3, nous devons borner les queues de V, ce qui est possible à cause de l'hypothèse (H6) qui assure (cf. [11])

$$E\, g_{K-1} (\sup \bar{Z}_n (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})) < \infty$$

Soit Q la loi de $1 + \sup_n \bar{Z}_n (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Alors V_z est majoré en loi conditionnellement par rapport à $\mathcal{F}_s$ par Q, soit :

Lemme 2.7. :

Pour toute fonction f positive croissante, on a :

$$E^{\mathcal{F}_s}(f(|V_z|)) \leq \int_1^{+\infty} f(a)\, Q(da).$$

Démonstration

Soit W la variable aléatoire $1 + \sup \bar{Z}_n$ $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Si f est une fonction en escalier croissante $f = 1_{[b,+\infty[}(x)$, alors f vérifie :

$$E^{\mathcal{F}_s}(f(|V_z|)) = P(|V_z|^2 > b^2/\mathcal{F}_s) \leq P(\bar{Z}_{n_\varepsilon} - s(R_x - (T(z), X(z); z) > b^2/\mathcal{F}_s)$$

$$\leq P(W^2 > b^2) = \int_b^{+\infty} Q(da) = \int_1^{+\infty} f(a)\, Q(da).$$

Le résultat du lemme s'obtient en approchant f positive croissante par une combinaison linéaire de fonctions en escalier.

Majoration de P_2

Recentrons les $\tilde{V}_z$ conditionnellement à $\mathcal{F}_s$. Si $p(\delta_\varepsilon)^{-1} \to +\infty$; P_1 vérifie

$$P_1 \leq P(|\Sigma\, a_z(\tilde{V}_z - E^{\mathcal{F}_s}(\tilde{V}_z))| > \frac{P}{2}) + P(|\Sigma a_z\, E^{\mathcal{F}_s}(\tilde{V}_z)| > \frac{P}{2} - \delta_\varepsilon)$$

Or conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, les V_z sont centrées :

$$|\Sigma\, a_z\, E^{\mathcal{F}_s}(\tilde{V}_z)| = |-\Sigma a_z\, E^{\mathcal{F}_s}(V_z \chi(a_z|V_z| \geq 1)| \leq \Sigma\; E^{\mathcal{F}_s}(a_z|V_z| \chi(a_z|V_z| \geq 1)$$

D'après le lemme 2.7., on a :

$$E^{\mathcal{F}_s}(|V_z|\, \chi(|V_z| \geq \frac{1}{a_z})) \leq \int_1^{+\infty} a\, 1_{[\frac{1}{a_z},+\infty[}(a)\, Q(da)$$

En appliquant Fubini, on obtient :

$$A_1 = E(|\Sigma\, a_z\, E^{\mathcal{F}_s}(V_z)|) \leq \int_1^{+\infty} aQ(da) \int_{u \in \{<\theta,u> - sL(\theta) > -\text{Log } a\}} \mu_\theta^{*s}(du)$$

Notons pour $r > 0$, $\Delta(r) = \{(u,v), \theta u + \eta v - L(\theta,\eta) > -r\}$. Le calcul de $\mu_\theta^{*s}(\Delta(s^{-1} \operatorname{Log} a))$ s'effectue en décomposant l'intégrale suivant la position de $(s\beta t, s\beta x)$ (espérance de μ_θ^{*s}) dans cet ensemble, quand a varie :

si $a \le e^{-sh(\beta t, \beta x)}$, alors $E_{\mu_\theta^{*s}}(T,X) \in \Delta(s^{-1} \operatorname{Log} a)$

Il est possible de choisi ℓ tel que : $0 < \ell < -h(\beta t, \beta x)$ car $(t,x) \in \mathcal{S}$ ce qui implique, que pour $\beta = \beta t(t,x)$, $h(\beta t, \beta x) < 0$). D'après 2.12 il existe $\gamma > 0$ tel que : $\mu_\theta^{*s}(s\,\Delta(\ell)) \le e^{-\gamma s}$, d'où :

$$\int_1^{+\infty} aQ(da)\, \mu_\theta^{*s}(s^{-1} \operatorname{Log} a) \le e^{-\gamma s} \int_{a<e^{\ell s}} aQ(da) + \int_{a>e^{\ell s}} aQ(da).$$

où ℓs est supposé supérieur à 1, ce qui est toujours possible car s tend vers l'infini.

Or
$$\int_{a>e^{\ell s}} aQ(da) \le (\ell s)^{-K+1} \int_1^{+\infty} a (\operatorname{Log} a)^{K-1} Q(da)$$

D'après (H6), il existe $K>1$ tel que cette dernière intégrale soit finie. D'où on tire :

$$P\left(\left|\Sigma a_z E^{\mathcal{F}_s}(\tilde{V}_z)\right| > \frac{p}{2} - \delta_\varepsilon\right) = O(p^{-1} s^{-K+1})$$

Conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ les $\tilde{V}_z$ sont indépendantes, donc on a, en utilisant l'inégalité de Čebičev pour des variables centrées :

$$B_1 = P\left(\left|\Sigma a_z (\tilde{V}_z - E^{\mathcal{F}_s}(\tilde{V}_z))\right| \ge \frac{p}{2}\right) \le \frac{4}{p^2} E\left(\Sigma a_z^2 E^{\mathcal{F}_s}(\tilde{V}_z - E^{\mathcal{F}_s} \tilde{V}_z)^2\right)$$

$$\le \frac{4}{p^2} E\left(\Sigma a_z^2 E^{\mathcal{F}_s}(\tilde{V}_z^2)\right)$$

On applique le lemme 2.7 à la fonction $f = x^2 1_{a_z x \le 1} + \frac{1}{a_z^2} 1_{a_z x > 1}$:

$$E^{\mathcal{F}_s}(\tilde{V}_z^2) \le \int_{a \le \frac{1}{a_z}} a^2 Q(da) + \frac{1}{a_z^2} \int_{a > \frac{1}{a_z}} Q(da).$$

On obtient :

$$B_1 \leq \frac{4}{p^2} E\left[\Sigma a_z^2 \int_{a\leq\frac{1}{a_z}} a^2 Q(da)\right] + E\left[\Sigma \int_{a>\frac{1}{a_z}} Q(da)\right]$$

En appliquant Fubini, on observe que le deuxième membre de cette inégalité est majorée par $A_1 = O(s^{-K+1})$, et que le premier membre est tel que :

$$E\left[\Sigma a_z^2 \int_{a\leq\frac{1}{a_z}} a^2 Q(da)\right] = \int_1^{+\infty} a^2 Q(da) \int_{\{\theta u+\eta v-sL(\theta,\eta)\leq -\text{Log } a\}} e^{\theta u+\eta n-sL(\theta,\eta)} \mu_\theta^{*s}(du, dv)$$

Partageons le domaine d'intégration de la façon suivante en posant
$K(u,v) = \theta u + \eta v - s L(\theta,\eta)$

$$\{a\leq e^{\ell s} ; K(u,v)\leq -\ell s\} \cup \{a\leq e^{\ell s} ; -\ell s < K(u,v) \leq -\text{Log } a\} \cup \{a>e^{\ell s} ; K(u,v)>-\text{Log } a\}$$

$$I \leq e^{-\ell s} \int_{a\leq e^{\ell s}} a^2 Q(da) + e^{-\gamma s} \int a Q(da) + \int_{a>e^{\ell s}} a Q(da)$$

Or :

$$\int_1^{e^{\ell s}} a (\ell s)^{K-1} Q(da) \leq \int_1^{e^{\ell s}} a (\text{Log } a)^{K-1} Q(da) < +\infty$$

D'où

$$\int_{a\leq e^{\ell s}} a Q(da) = O(s^{-K+1}) \quad \text{et} \quad \int_{a>e^{\ell s}} a Q(da) = O(s^{-K+1})$$

et $B_1 = O(s^{-K+1} p^{-2})$, ce qui a pour conséquence que la probabilité P_2 est telle que $P_2 = O(s^{-K+1} p^{-1}) + O(s^{-K+1} p^{-2})$

La probabilité P_3, majorée par A_1, est aussi un $O(s^{-K+1})$.

Il reste maintenant à vérifier qu'il est possible de trouver U, V, W, p, s, qui vérifient simultanément les conditions imposées au cours de cette démonstration. On doit avoir :

$$-\ \varepsilon V \to 0\ ;\ \varepsilon W \to 0,\ \sqrt{\varepsilon}\, U \to +\infty\ ;\ \sqrt{\varepsilon}\, V \to +\infty;\ \frac{W}{U} \to +\infty\ ;\ \varepsilon U \to 0$$

$$-\ s \to +\infty\ ;\ \varepsilon s \to 0\ ;\ p^{-1}\,(\varepsilon s)^{\frac{1}{2}} \to 0\ ;\ p \exp\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) \to +\infty\ ;\ p \to 0\ ;$$

$$s^{-K+1}\, p^{-1} \to 0\ ;\ s^{-K+1}\, p^{-2} \to 0\ ;\ s^{-K+1} \to 0.$$

Posons $U = \varepsilon^{-u}$, $V = \varepsilon^{-v}$, $W = \varepsilon^{-w}$, $s = [\varepsilon^{-\sigma}]$, $p = \varepsilon^{\pi}$

Il suffit de choisir u, v, w tels que :

$$\frac{1}{2} < u < w < 1\ ;\ \frac{1}{2} < v < 1$$

$$0 < \sigma < 1\ ;\ 0 < \pi < \inf\left(\frac{1-\sigma}{2}\ ,\ \frac{(K-1)\sigma}{2}\right)$$

On peut choisir par exemple , $\sigma = \frac{1}{K+1}$ et $\pi = \frac{K-1}{4(K+1)}$. Ceci clôt la démonstration.

2.4. - QUELQUES INTERPRETATIONS

Cette méthode asymptotique conduit à un résultat indépendant de la loi G de la durée de vie, pourvu que celle-ci possède des moments exponentiels (H5). La donnée importante est μ. On peut alors faire un relèvement de μ en un autre modèle de branchement avec marche aléatoire : la mesure $\mu(dt, dx)$ est factorisée en $\mu_t(dx)\, C(dt)$ où C est une loi de probabilité sur R^+. Quand y atteint l'âge λ_y, de loi C, il meurt et donne naissance simultanément à tous ses enfants dont les positions relativement à lui sont distribuées, conditionnellement à λ_y, suivant un processus ponctuel d'intensité μ_{λ_y}.

C'est un processus de Sevastyanov (cf. [25] p.8) avec marche aléatoire. Quelle que soit l'énumération choisie pour les enfants, on obtient les mêmes résultats avec les formules :

$$T(i_1,\ldots,i_n) = \lambda_o + \lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{(i_1,\ldots,i_n)}$$

$$X(i_1,\ldots,i_n) = X_o(i_1) + \ldots + X_{(i_1,\ldots,i_{n-1})}(i_n).$$

2.4.1. - Présentation de deux cas dégénérés

A partir de ce processus de Sevastyanov, on peut retrouver deux cas dégénérés intéressants :

a)- $\mu_t(dx) = m\,\delta_o(x)$ (pas d'espace) : $L(\theta,\eta) = \text{Log } m + L_c(\theta)$

C'est le processus de Bellman-Harris classique ; $\alpha(t,x)$ se simplifie en αt et (2.7) devient :

$$\text{Log} \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, m\, C(dt) = 0$$

Ceci est l'équation (2.1) ; par conséquent α est le paramètre de Malthus [25].

b)- $C(dt) = \delta_1(t)$ $\quad_t(dx) = F(dx)$: $L(\theta,\eta) = \theta + L_1(\eta)$

C'est le processus de branchement avec marche aléatoire à temps discret ([9], [28]).

Si L_1 et h_1 sont définis à partir de F_1, (2.6) devient

$$\alpha(t,x) = - \text{th}_1\left(\frac{x}{t}\right)$$

(qui est rapprocher de [9] p. 636) et (2.7) devient :

$$\alpha'_t(t,x) = L_1\left(-\alpha'_x(t,x)\right)^{(a)} \qquad (2.19)$$

2.4.2. - Interprétation en fonction des deux cas dégénérés

Dans l'asymptotique utilisée, la fonction adéquate pour décrire la croissance de la population est donc $(t,x) \to \alpha(t,x)$. Ceci peut s'interpréter en fonction des deux cas dégénérés précédents. Pour η fixé, la mesure $\mu^\eta(dt) = \int_R e^{\eta x}\, \mu(dt,dx)$ ne charge pas $\{0\}$ et a un support inclus dans $\mathbb{R}^+$, donc il existe un unique θ tel que : $\log \int_o^\infty e^{\theta t}\, \mu^\eta(dt) = 0$, c'est-à-dire $L(\theta,\eta) = 0$ (- θ est aussi la pente de la tangente menée de (0,0) au graphe de h_{μ_η}). Ceci permet de définir une fonction $\tilde{L}$ définie partout, telle que : $L(\theta,\eta) = 0 \iff \theta = -\tilde{L}(\eta)$. En vertu du théorème des fonctions implicites $(\tilde{L}'_{\theta>0})^{(a)}$, $\tilde{L}$ est C^∞ et on vérifie que $\tilde{L}'' > 0$, donc $\tilde{L}$ est convexe. La relation

(a) Les notations L'_θ, α'_t, α'_x désignent les dérivées partielles premières des fonctions considérées.

(2.7) : $L(-\alpha'_t, -\alpha'_x) = 0$ devient $\alpha'_t = \tilde{L}(-\alpha'_x)$ qui est analogue à (2.9) qui était issue du processus de branchement à temps discret, ou encore $\alpha(t,x) = -t\tilde{h}(\frac{x}{t})$ avec $\tilde{h}$ duale de $\tilde{L}$. Vu le théorème 2.3., la population totale est en $\exp[\varepsilon^{-1}\alpha^s(t) + o(\varepsilon)]$ où $\alpha^s(t) = \alpha(t,x^s) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \alpha(t,x) = -t \inf_{x\in\mathbb{R}} \tilde{h}(x) = t\tilde{L}(0)$ par dualité. Or, par construction, $\tilde{L}(0)$ est le paramètre de Malthus d'un processus de Bellman-Harris qui aurait pour mC(dt) la mesure $\mu^\circ(dt)$ cf. 2.3.a). Dans l'échelle utilisée (ε log), à l'instant t, la population totale est du même ordre que celle autour de x^s, ou que celle d'un processus non-spatial régi par la marginale de μ en t.

2.4.3.- Ligne généalogique d'une personne en vie à l'instant t autour de x

Soit donné $(t,x) \in \mathcal{S}$. On a vu que, pour la population en vie à l'instant t autour de x, l'essentiel venait des générations de numéros $\beta(t,x)^{-1}\varepsilon^{-1} + o(\varepsilon^{-1})$ et, par conséquent, tout semble se passer comme si les générations avaient une durée moyenne de $\dfrac{\varepsilon^{-1}t}{\varepsilon^{-1}\beta(t,x)^{-1} + o(\varepsilon^{-1})} = t\beta(t,x) + o(1)$, le saut moyen correspondant étant $\dfrac{\varepsilon^{-1}x}{\varepsilon^{-1}\beta(t,x)^{-1} + o(\varepsilon^{-1})} = x\beta(t,x) + o(1)$. Or d'après 2.4.1, $\alpha(t,x) = \theta t + \eta x$ avec $\theta = h'_t(t\beta(t,x), x\beta(t,x))$, $\eta = h'_x(t\beta(t,x), x\beta(t,x))$; donc on a :

$$t\beta(t,x) = L'_\theta(\theta,\eta) = \int \tau \exp[\theta\tau + \eta\xi - L(\theta,\eta)]\,\mu(d\tau, d\xi)$$

$$x\beta(t,x) = L'_\eta(\theta,\eta) = \int \xi \exp[\theta\tau + \eta\xi - L(\theta,\eta)]\,\mu(d\tau, d\xi)$$

Ceci suggère que, pour la plupart des individus en vie à l'instant t autour de x, la loi empirique du saut dans l'espace-temps, calculée le long de leur ligne généalogique est voisine de : $(\tau,\xi) \to \exp[\theta\tau + \eta\xi - L(\theta,\eta)]\,\mu(d\tau, d\xi)$. De tels résultats ont été démontrés rigoureusement pour le processus à temps discret unitype [38] et multitype [33]. Le fait que : $\alpha(t,x) = \theta t + \eta x$ joue le rôle d'un paramètre de Malthus local, permet alors de conjecturer de plus que la répartition des âges à t autour de x converge vers la loi :

$$\tau \to \frac{e^{\theta\tau}\, G(]\tau, +\infty[)\, d\tau}{\int e^{\theta u} G(]u, +\infty[)\, du}$$

Si on se place en x^s, on a : $\theta = \tilde{L}(0)$ et, on retrouve la distribution stable des âges pour un processus non-spatial régi par la marginale de μ en t [25].

2.4.4. - Intérêt du paramètre ε

Biggins [13] a aussi démontré un analogue du théorème 2.2 et donc remarqué 2.5.1. bien que dans une optique un peu différente, sans introduire de ε mais en faisant tendre t vers l'infini. L'intérêt de ε, donc de disposer de la variable t est évidemment d'envisager $\alpha(t,\cdot)$ dans son évolution au cours du temps. Dans le cas présent on peut effectivement se passer de t car α est 1-homogène. Ceci est dû au fait que le processus de reproduction ne dépend pas de la position du père dans l'espace-temps. On peut se libérer de cette restriction en supposant qu'un père en (σ,a) engendre ses enfants suivant un processus ponctuel d'intensité $\mu(\sigma, a ; \cdot)$. Ce nouveau modèle sera présenté dans le chapitre III.

CHAPITRE III

MODELES STOCHASTIQUES ET EQUATIONS DETERMINISTES
SIMULATIONS DE PROCESSUS DE BRANCHEMENT NON HOMOGENES

INTRODUCTION

Dans ce chapitre sont présentées les idées directrices qui ont préludé aux études plus formelles des chapitres précédents et dont certaines seront l'objet d'études ultérieures.

Avec la connection de Mac Kean [34] qui montre que, dans un modèle de diffusion avec branchement, la fonction de répartition de la position à l'instant t de l'individu le plus "à droite" vérifie une équation de réaction-diffusion, apparaît le problème de la liaison entre modèle stochastique et équation déterministe. Ce résultat met en évidence le fait que la non-linéarité d'un phénomène stochastique n'est pas traduite de façon simple par une équation déterministe (paragraphe 3.1.1).

Les équations de réaction diffusion ont été très étudiées car leur champ d'application s'étend à de nombreux problèmes issus de la biologie. Nous présentons ici les principaux résultats existant pour ces équations, car ils illustrent les différents problèmes que nous nous poserons pour un autre type d'équations aux dérivées partielles : existence de solutions stationnaires, d'ondes de propagation, étude de la stabilité et du domaine d'attraction de ces solutions (paragraphe 3.1.2)

Jusqu'à présent, nous avons toujours supposé que le taux de reproduction était le même pour tous les individus. Ceci ne permet pas de modéliser des situations où, par exemple, une trop forte concentration à un instant donné dans un lieu x diminue les possibilités de reproduction (phénomène d'autosaturation). Dans ce but nous construisons une marche aléatoire de branchement définie de la même façon qu'au chapitre I, à la seule différence que l'intensité $\mu(dx)$ du processus ponctuel n'est plus une donnée du modèle, mais dépend du lieu x et de l'état de la population en x au temps t. La mesure $\mu(dx)$ devient $\mu(t,x, \alpha(t,x) ; dx)$, où $\alpha(t,x)$ est la "log-densité" définie

au chapitre I. Les résultats concernant ce nouveau type de processus ne sont pas encore démontrés. Cependant nous présenterons dans le paragraphe 3.2.1 l'ensemble des résultats que nous espérons obtenir car ils ont constitué une hypothèse de travail plausible et fructueuse pour les simulations.. Ces résultats sont :

- pour ce nouveau processus, il existe une "log-densité" $\alpha(t,x)$. Sur certains domaines (que nous préciserons), la fonction $\alpha(t,x)$ coïncide avec la fonction $\beta(t,x)$ solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = L\left(t,x,\beta\ ;\ -\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) \qquad \text{où } L(t,x,\beta;\cdot)$$

est le logarithme de la transformée de Laplace de $\mu(t,x,\beta\ ;\ \cdot)$.

- dans le cas particulier où $\mu(t,x,\alpha\ ;\ dx) = \mu(dx) \exp(S(\alpha(t,x))$ (traité dans les simulations), la propagation se fait asymptotiquement selon l'onde de vitesse c telle que :

$$h(c) = S_{max}$$

Différentes simulations de ce processus ont été effectuées (paragraphe 3.2.2). Elles confirment ces hypothèses de travail. En étudiant l'équation différentielle précédemment citée, nous obtenons la forme asymptotique de la propagation ainsi que la vitesse c. Les procédés asymptotiques que nous utilisons pour étudier ces processus de branchement constituent une approximation. Les simulations permettent de tester la validité de ce modèle pour le calcul de vitesses de propagation. Les résultats observés dans les simulations nous amènent à introduire un terme correctif dans le calcul de la vitesse de propagation, quand le paramètre ε n'est pas suffisant petit.

3.1. - Equation différentielle associée au modèle stochastique de diffusion avec branchement

Les deux paragraphes constituant cette partie ne présentent pas de résultats originaux, mais montrent jusqu'à quel point est arrivée l'étude d'un modèle stochastique plus simple que celui que nous étudions.

La partie 3.1.1 présente une relation entre la diffusion avec branchement

et l'équation de réaction diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$$

dans un cadre un peu plus général que celui de Mac Kean [34].

Dans la partie 3.1.2 sont rassemblés les principaux résultats existant sur les équations de réaction diffusion. Cette partie figure dans notre étude, car elle permet de mettre en évidence différents problèmes posés par les équations aux dérivées partielles non linéaires, ainsi que la liaison entre ces résultats et le modèle stochastique de diffusion avec branchement.

3.1.1 - Diffusion avec branchement

Présentation du modèle

A l'instant $t=0$ une particule commence dans $\mathbb{R}$ un mouvement brownien w partant de l'origine jusqu'à un temps d'arrêt T aléatoire, indépendant de w, de loi exponentielle de paramètre λ. A cet instant T, la probabilité que la particule se scinde en k particules est p_k. On suppose $\Sigma\, p_k = 1$ (pas d'extinction possible) et $1 < \Sigma\, k\, p_k = m < \infty$ (nombre moyen d'enfants m est fini). A leu tour ces particules évoluent selon des trajectoires browniennes indépendantes commençant en $w(T)$ et sont soumises à la même règle de scission. Au bout d'un temps $t>0$, il y a un nombre aléatoire de particules $n(t)$, ayant pour positions $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_{n(t)}(t)$. La variable aléatoire $n(t)$ vérifie :

$$P\,(n(t) = k) = e^{-(m-1)\,\lambda t}\ (1 - e^{-(m-1)\lambda t})^{k-1}$$

(c'est un résultat classique pour les processus de naissance linéaires).

Proposition 3.1. : (Mac Kean [34], Bramson [14])

Soit g une fonction donnée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction :

$$u(x,t) = E^x\,[g\,(\xi_1(t)) \ldots g\,(\xi_{n(t)}(t))]$$

où E^x est une espérance conditionnelle (le conditionnement est : à l'instant 0 la particule initiale est en x).

Alors la fonction $u(x,t)$ est solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \left(\sum_1^\infty p_k u^k - u \right)$$

$$u(x,o) = g(x)$$

Corollaire 3.2.

Si $g(x)$ est la fonction $1_{]0,+\infty[}(x)$, alors $u(x,t) = P\ (\forall i \leq n(t), \xi_i(t) < x)$. $u(x,t)$ est la fonction de répartition de la position du descendant le plus éloigné dans la direction des $x>0$ à l'instant t.

Démonstration du corollaire

Par définition, la fonction $u(x,t)$ est telle que :

$$u(x,t) = P^x\ (\forall i, 1 \leq i \leq n(t), \xi_i(t) > 0) = P^o\ (\forall i, 1 \leq i \leq n(t), \xi_i(t) > -x)$$
$$= P^o\ (\forall i, 1 \leq i \leq n(t), \xi_i(t) < x)$$

(le problème est symétrique par rapport à l'origine de l'espace).

Démonstration de la proposition

Calculons $u(x,t)$ en fonction de l'instant de scission de la particule initiale

$$u(x,t) = P\ (T>t)\ E^x\ [g(\xi_1(t))] + \int_o^t \lambda\ e^{-\lambda s}\ E^x\ E^{s,\xi(s)} [\Sigma\ p_k\ [g(\xi_1(t)) \ldots\ g(\xi_{n_k(t)}(t))]$$

Soient $\xi_{n_{i-1}+1}(t), \ldots, \xi_{n_i}(t)$ les positions à l'instant t des descendants de la $i^{ème}$ particule ($i \leq k$) issue de l'éclatement à l'instant s de la particule initiale. Ces dernières particules se sont reproduites indépendamment les unes des autres, par conséquent on a :

$$E^{s,\xi(s)}\ \{[g(\xi_1(t)) \ldots g(\xi_{n_1}(t))] \ldots [g(\xi_{n_{k-1}+1}(t)) \ldots g(\xi_{n_k}(t))]\} = [u\ (\xi(s),\ t-s)]^k.$$

D'où $u(x,t) = e^{-\lambda t}\ E^x\ [g(\xi_1(t))] + \lambda \sum_{k=1}^\infty p_k \int_o^t e^{-\lambda s}\ E^x\ [u^k(\xi(s), t-s)]\ ds.$

En faisant le changement de variable $\tau = t-s$, on obtient :

$$u(x,t) = e^{-\lambda t}\, E^x [g(\xi_1(t))]\, \lambda e^{-\lambda t} \Sigma p_k \int_o^t e^{\lambda\tau}\, E^x [u^k (\xi(t-\tau),\tau)]\, d\tau.$$

Posons :

$$v(x,t) = E^x [g(\xi_1(t))]$$

et

$$w_k(x,t) = E^x [u^k (\xi(t-\tau),\tau)] \ .$$

Les fonctions $v(x,t)$ et $w_k(x,t)$, pour τ fixé, vérifient l'équation de Kolmogorov Backward :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad v(x,o) = g(x) \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} \qquad w_k(x,\tau) = [u(x,\tau)]^k \tag{3.2}$$

Par conséquent, u vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-\lambda t} [-\lambda v + \frac{\partial v}{\partial t}] + \lambda e^{-\lambda t} \{\Sigma\, p_k [-\lambda \int_o^t e^{\lambda\tau}\, w_k(x,t;\tau)\, d\tau + e^{\lambda t} u^k(x,t)$$

$$+ \int_o^t e^{\lambda\tau} \frac{\partial w_k}{\partial t}(x,t\,;\,\tau)\, d\tau]\}.$$

En utilisant (3.1) et (3.2), on obtient que u vérifie l'équation de réaction diffusion :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k u^k - u \right) \\ u(x,o) = g(x). \end{cases}$$

Remarque 1 : Equation de Burgers [16]

En définissant à partir de cette diffusion avec branchement une fonctionnelle différente, il est possible d'obtenir une autre équation déterministe. Ce sera ici une équation de Burgers avec régularisation elliptique :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = z \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Nous présentons cet exemple à cause de l'analogie entre la démarche conduisant ici à cette équation et celle qui a conduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi des chapitres précédents.

La fonction $u(x,t)$ est maintenant définie à l'aide d'une fonctionnelle additive

$$u(x,t) = E^x \left[g\left(\xi_1(t)\right) + \ldots + g\left(\xi_{n(t)}(t)\right) \right]$$

Une démonstration analogue à la précédente conduirait à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda(m-1)\, u.$$

Pour $g \equiv 1$, $u(x,t) = E(n(t)) = N(t)$. On retrouve le résultat classique sur la taille moyenne de la population : $N(t) = e^{\lambda(m-1)\, t}$. Dans cette diffusion avec branchement, la durée moyenne de vie d'une particule est $1/\lambda$ et la population croît exponentiellement en $\lambda(m-1)$. Pour observer la population à un instant t grand, nous utilisons le procédé asymptotique qui consiste à poser $\varepsilon = 1/\lambda$, ε étant destiné à tendre vers 0. L'espace est normalisé de façon que l'écart moyen des positions entre deux subdivisions de temps soit de l'ordre de l'unité. Or pour le brownien, on a :

$$\xi(t+\varepsilon) - \xi(t) \sim N(0,\varepsilon).$$

La normalisation correspondante de l'espace consiste donc à remplacer x par $x/\sqrt{\varepsilon}$.

Posons $v(x,t) = u(x\sqrt{\varepsilon},\, t)$. La fonction v est solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon}\, v(x,t) + \dfrac{\varepsilon}{2} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(x,0) = g\left(x\sqrt{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

Cette normalisation du temps et de l'espace conduit à une situation où la partie due à l'agitation brownienne a une influence assez faible sur le terme de croissance, et le processus est très proche d'une situation déterministe. La dernière normalisation porte sur la taille de la population qui croît exponentiellement en $1/\varepsilon$.

Soit $w(x,t) = \varepsilon \operatorname{Log} v(x,t)$. La fonction w est solution de :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (m-1) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

Finalement la fonction $z(x,t) = \frac{\partial w}{\partial x}$ vérifie :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = z \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \qquad (3.3)$$

(3.3) est l'équation de Burgers avec régularisation elliptique [16].

Remarque 2 : Sur la vitesse de propagation

On obtient la même vitesse de propagation en étudiant l'équation de réaction diffusion issue de la diffusion avec branchement et le modèle en temps discret correspondant.

N.B.: Il n'en ira pas de même dans les modèles avec saturation.

Considérons la diffusion avec branchement de loi exponentielle de paramètre $\lambda=1$, avec exactement deux particules à chaque scission. L'équation de réaction-diffusion associée au descendant le plus "à droite" est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 - u \\ \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x\leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

C'est un cas particulier de l'équation de Kolmogorov-Petrovskii-Piscounoff [30] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u), \qquad u(x,0) = 1_{]-\infty,0[}(x).$$

(il suffit de faire la transformation $v(x,t) = 1-u(x\sqrt{2}, t)$).

Une étude approfondie de cette équation (voir 3.1.2 ii)) montre que la propagation se fait asymptotiquement à la vitesse -2 pour $v(x,t)$. Ceci correspond pour u à la vitesse $c = \sqrt{2}$.

L'analogue en temps discret de ce modèle est une marche aléatoire de branchement de durée de vie $1/\lambda=1$, qui a au bout d'un temps unité e descendants en moyenne (puisque $E(n(t)) = \exp(\lambda(m-1)t)$). La dispersion de ces descendants est gaussienne centrée, et par conséquent la transformée de Cramer associée est

$h(x) = \frac{1}{2} x^2$. La vitesse du modèle en temps discret est donc telle que :

$$h(c) = \text{Log } e \qquad \text{soit} \qquad c = \sqrt{2}.$$

Cette remarque met en évidence l'intérêt de l'étude des équations de réaction-diffusion pour les problèmes que nous considérons.

3.1.2 - Equations de réaction-diffusion

Les pionniers de l'étude de ces équations furent Fisher et Kolmogorov, Petrowsky, Piscounoff. Elles apparaissent dans de nombreux problèmes issus de la biologie :

- propagation des gènes favorables : étude de la statique et de la dynamique des fréquences de gènes soumis à une pression de sélection ; Fisher [22].
- étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique ; K.P.P. [30].
- propagation de l'influx nerveux, combustion ; Aronson-Weinberger [1].

Nous nous intéresserons ici au problème scalaire avec conditions initiales :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) & \text{dans } Q_T \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{condition initiale.} \end{cases} \tag{3.4}$$

où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, $Q_T = \Omega \times]0, T[$ et ϕ une fonction donnée continue bornée dans $\overline{\Omega}$.

La question centrale pour ces équations est de déterminer les états asymptotiques stables, c'est-à-dire les solutions qui, si elles sont perturbées à un instant donné par une fonction uniformément petite, conservent leur comportement à long terme. En effet, si une solution appartient à un état asymptotique instable, son apparence est accidentelle et une petite perturbation détruira son comportement à long terme. Aussi sera-t-elle rarement observée dans la nature.

De nombreux résultats utilisent la C^o-stabilité, où C^o est la norme associée au problème : $|u(\cdot,t)|_o = \sup_{x\in\Omega} |u(x,t)|$. La notion mathématique exacte d'un état asymptotique stable est obtenue (Fife [20]) en définissant successivement :

Définition 1 :

On dit qu'une solution u de (3.4) est C^o-stable si pour tout $\delta>0$, il existe $\varepsilon>0$ tel que, toute solution u^* définie sur $\Omega \times [0,T[$, $(T>0)$ et telle que : $|u^*(\cdot,0) - u(\cdot,0)|_o < \varepsilon$, peut être continuée en une solution sur $\Omega \times]0, +\infty[$ telle que :

$$|u^*(\cdot,t) - u(\cdot,t)| < \delta \qquad \forall t > 0.$$

Définition 2 :

On dit qu'une solution u de (3.4) est C^o-asymptotiquement stable si :

- u est C^o-stable
- il existe $\delta>0$ tel que toute solution u^* ayant les propriétés énoncées ci-dessus vérifie de plus :

$$\lim_{t\to\infty} |u^*(\cdot,t) - u(\cdot,t)|_o = 0$$

Définition 3 : Etat asymptotique

Soit G le groupe des transformations laissant invariant l'ensemble des solutions de (3.4). On appelle état asymptotique une classe d'équivalence de solutions asymptotiquement équivalentes, c'est-à-dire de solutions u_i et u_j telles qu'il existe une transformation $T\in G$ vérifiant :

$$\lim_{t\to\infty} \sup_x |u_i(x,t) - T\,u_j(x,t)| = 0.$$

Définition 4 :

On dit qu'un état asymptotique $[u]$ est C^o-stable si l'ensemble $\{\phi,\ u_\phi \in [u]\}$ est ouvert dans $C^o(\mathbb{R})$. La notation u_ϕ désigne la solution de (3.4) ayant ϕ pour condition initiale.

Nous nous intéressons ici aux états asymptotiques stables qui sont :

- des solutions stationnaires : $u(x,t)$ est indépendante de t
- des ondes de propagation : $u(x,t) = U(x - ct)$

c est appelée la vitesse de propagation. Si la fonction U est monotone bornée, U est un front de propagation.

Remarque :

Les états asymptotiques ont été définis pour des solutions existant pour tout $t>0$. Une condition suffisante d'existence de telles solutions est la présence d'une borne a priori pour les solutions de l'équation de réaction-diffusion, car alors il existe le théorème suivant :

Théorème :

Etant données deux fonctions $f \in C^1(\mathbb{R})$ et ϕ dans $C^0(\mathbb{R}^n)$, on suppose que toute solution u_ϕ de (3.4) vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |u(\cdot,t)|_0 \leq K(t)$ où $K(t)$ est une fonction positive donnée.

Alors il existe une solution unique à l'équation avec condition initiale (3.4).

Sans cette condition, il est possible qu'il n'existe pas de solution de (3.4) définie pour tout t. Un exemple d'une telle situation est l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^2 \qquad u(0) = 1 \qquad \text{où la solution est } u(x,t) = \frac{1}{1-t}$$

a)- Etude des solutions stationnaires stables et de leur domaine d'attraction

On peut montrer (Fife [20]) que les seules solutions stationnaires bornées stables sont :

- les constantes qui sont stables pour le système cinétique associé : $\frac{du}{dt} = f(u)$
- les solutions stationnaires monotones.

Ces dernières sont structurellement instables car un léger changement de f détruit leur existence (leur condition d'existence est que $V(u) = \int_0^u f(s)\,ds$ ait deux maxima locaux successifs égaux).

Les démonstrations reposent sur le principe de maximum fort et sur des estimations a priori des dérivées.

Hypothèse : Nous supposerons dans ce qui suit que $f(0) = f(1) = 0$ et que f est C^1.

Proposition 3.3. : (Principe du maximum fort) ([1])

On suppose que $u(x,t) \in [0,1]$ et $v(x,t) \in [0,1]$, et que u et v vérifient les inégalités :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u) \geq \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - f(v) \qquad \text{sur }]a,b[\times]0,T]$$

$$0 \leq v(x,0) \leq u(x,0) \leq 1 \qquad \text{dans }]a,b[$$

avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $0 < T \leq +\infty$. De plus si $a > -\infty$, on suppose que : $0 \leq v(a,t) \leq u(a,t) \leq 1$ sur $[0,T]$ et si $b < +\infty$, on suppose que : $0 \leq v(b,t) \leq u(b,t) \leq 1$ sur $[0,T]$. Alors on a l'inégalité $u \geq v$; si de plus $u(x,0) > v(x,0)$ sur un sous-intervalle ouvert de $]a,b[$, alors $u > v$ sur $]a,b[\times]0,T]$.

De ce principe du maximum se déduit l'outil principal utilisé, dans l'étude de la stabilité.

Proposition 3.4. : (Aronson-Weinberger [1])

Soit $q(x) \in [0,1]$ une solution de l'équation différentielle ordinaire : $q'' + f(q) = 0$ sur $]a,b[$, où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Si $a > -\infty$ on suppose $q(a) = 0$ et si $b < +\infty$, $q(b) = 0$. Soit $v(x,t)$ la solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v) & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ v(x,0) = \begin{cases} q(x) & \text{dans }]a,b[\\ 0 & \text{dans } \mathbb{R} -]a,b[\end{cases} \end{cases}$$

Alors $v(x,t)$ est une fonction de t non décroissante pour tout x.

De plus on a : $\lim_{t \to \infty} v(x,t) = \tau(x)$ uniformément sur tout intervalle borné, où $\tau(x)$ est la plus petite solution non négative du système sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \tau'' + f(\tau) = 0 & (3.5) \\ \tau(x) \geq q(x) \qquad \text{sur }]a,b[& (3.6) \end{cases}$$

Démonstration de la proposition (3.4) ([1])

De la proposition 3.3, on déduit que $1 \geq v(x,t) \geq 0$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. On peut de nouveau appliquer 3.3 aux fonctions v et q :

$$v(x,t) \geq q(x) \quad \text{dans} \quad]a,b[\times \mathbb{R}^+.$$

Par conséquent on a : $\forall h>0$, $v(x,h) > v(x,0)$ dans $\mathbb{R}$. En appliquant 3.3 à $v(x,t+h)$ et $v(x,t)$, on conclut :

$$\forall h>0 \qquad v(x,t+h) \geq v(x,t) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

Puisque $u \equiv 1$ est solution de : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$, la proposition 3.3 montre que $v(x,t) \leq 1$. Ainsi pour tout x, $v(x,t)$ est non décroissante en t et bornée supérieurement. Par conséquent la limite $\tau(x)$ existe. Avec des arguments issus de la théorie des équations paraboliques, on peut montrer que $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ convergent uniformément sur tout intervalle borné. On en déduit que $\tau(x)$ vérifie (3.5). De plus, puisque $v(x,t)$ est à valeurs dans $[0,1]$, $\tau(x) \in [0,1]$ et l'hypothèse $v(x,t) \geq q(x)$ dans $]a,b[\times \mathbb{R}^+$ a pour conséquence que $\tau(x)$ vérifie l'inégalité (3.6).
Finalement si $\sigma(x)$ est une solution non négative de (3.5) vérifiant l'inégalité (3.6), alors $v(x,0) \leq \sigma(x)$. D'après la proposition 3.3, $v(x,t) \leq \sigma(x)$ et donc $\tau(x) \leq \sigma(x)$, ce qui clôt la démonstration.

A l'aide de cette proposition Aronson et Weinberger ont montré des résultats de stabilité asymptotique, dans le cas où f possède un seul zéro stable.

Proposition 3.5 [1] : (cas où f a un seul zéro stable)

On suppose que $f(0)=f(1)=0$ et f est une fonction de $C^1[0,1]$. Soit $u(x,t)$ une solution de (3.4) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

i) si $f(u)$ vérifie : $f'(0) > 0$, $f(u) > 0$ dans $]0,1[$, alors soit : $u(x,t) \equiv 0$, soit :

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1$$

ii) si $f(u)$ vérifie : $f'(0) > 0$, $f'(1) > 0$, $f(u) > 0$ dans $]0,\alpha[$, et $f(u) < 0$ dans $]\alpha,1[$ où $\alpha \in]0,1[$, alors $u(x,t) \equiv 0$, $u(x,t) \equiv 1$ ou

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \alpha.$$

Les deux propositions suivantes traiteront le cas où la fonction f possède deux zéros stables. Il se pose alors le problème des domaines d'attraction de chacun de ces points.

Nous ferons jusqu'à la fin de ce paragraphe a) les hypothèses suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = f(1) = 0 \ ; \ f \in C^1 \ ; \ f'(0) < 0 \ ; \ f'(1) < 0 \\ V(u) = \int_0^u f(s)\, ds < 0 \qquad\qquad \forall u \in]0,1] \end{array}\right] \qquad (H)$$

Considérons le graphe de la fonction $V = V(u)$ dans le plan (u,V). Soit S l'ensemble des segments horizontaux de longueur non nulle tels que :

(a) le segment est situé strictement au-dessus du graphe, sauf à ses extrémités.

(b) chaque extrémité située à distance finie appartient au graphe de V.

On peut montrer (Fife [20]) qu'il y a bijection entre les segments de S et les solutions non constantes de l'équation : $\psi'' + f(\psi)=0$, $x \in]-\infty, +\infty[$ vérifiée par les solutions stationnaires de (3.4) modulo des translations et des symétries sur x (voir Figure 3.1.) .

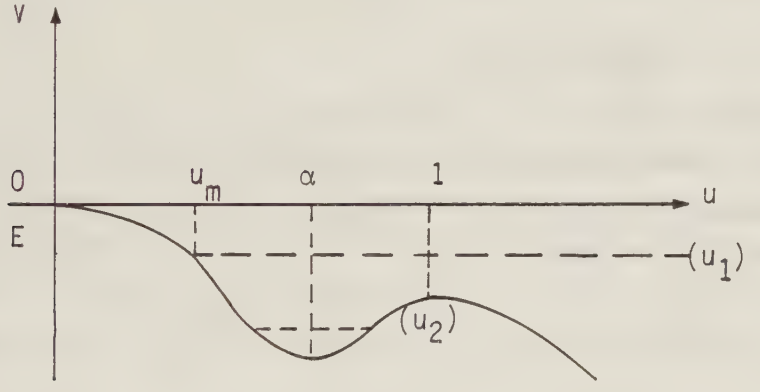


FIGURE 3.1.

Ainsi au segment (u_1) correspond une solution stationnaire u_1 ayant un minimum simple u_m (dépendant de E). Le segment (u_2) correspond à une solution stationnaire périodique. A partir de $u_1(x)$, on définit la fonction $v_1(x)$, obtenue en translatant $u_1(x)$ de façon que u_m soit atteint en $x=0$ (voir Figure 3.2).

Proposition 3.6. : (Aronson-Weinberger [1]) : Domaine d'attraction de 0

Soit $\phi(x)$ une fonction telle que $0 \leq \phi \leq 1$ et $\phi(x) \leq v_1(x)$ (où $v_1(x)$ est la solution stationnaire décrite ci-dessus). Alors la solution $u(x,t)$ de (3.4) ayant pour condition initiale $u(x,0) = \phi(x)$ vérifie :

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \qquad \text{uniformément sur les intervalles bornés en } x$$

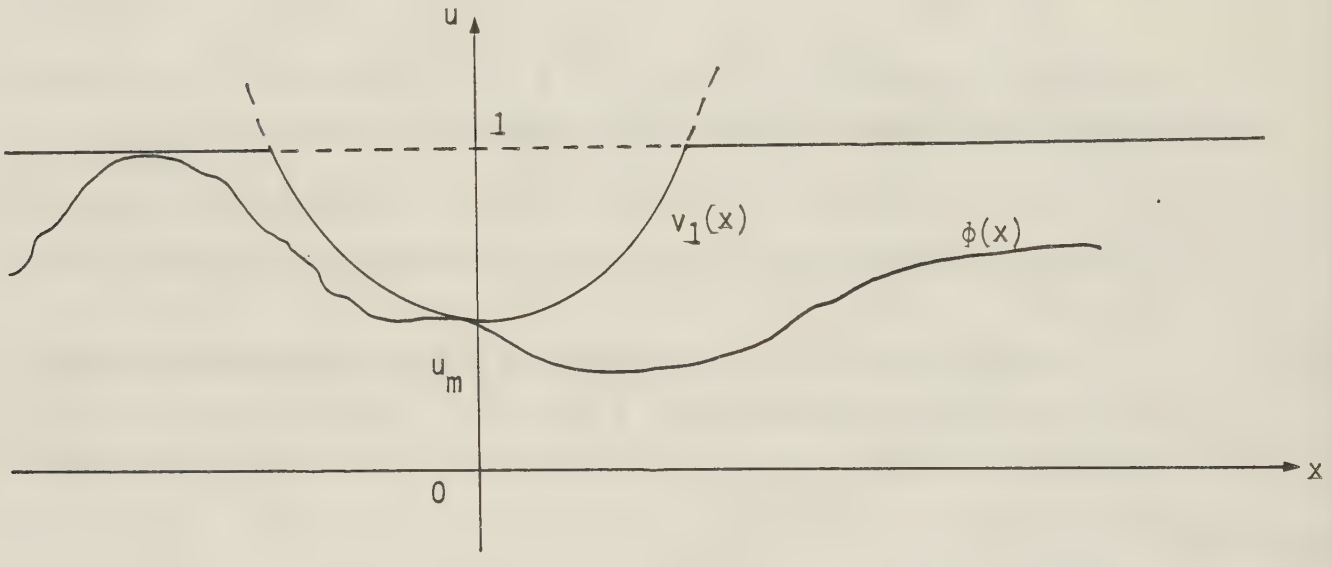


FIGURE 3.2.

Soit α un zéro de f dans $]0,1[$. D'après les hypothèses (H), ce point existe. Soit u_2 une solution périodique stationnaire de (3.4) telle que $x=0$ soit un minimum de u_2 et telle qu'il existe x tel que $u_2(x) = \alpha$ (on peut associer une telle solution au segment (u_2) de la figure 3.1). Soit I l'intervalle centré en 0 avec exactement quatre points tels que $u_2 = \alpha$. On définit alors $\overline{\phi}(x)$ par :

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} u_2(x) & x \in I \\ \alpha & x \notin I \end{cases}$$ (voir figure 3.3.).

Proposition 3.7. (Fife [20]): Domaine d'attraction de 1

Sous les hypothèses (H), on suppose que ϕ vérifie $\overline{\phi}(x) \leq \phi \leq 1$. Alors la solution $u(x,t)$ de (3.4) ayant pour condition initiale $u(x,0) = \phi(x)$ vérifie

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1 \qquad \text{uniformément sur les intervalles bornés en}$$

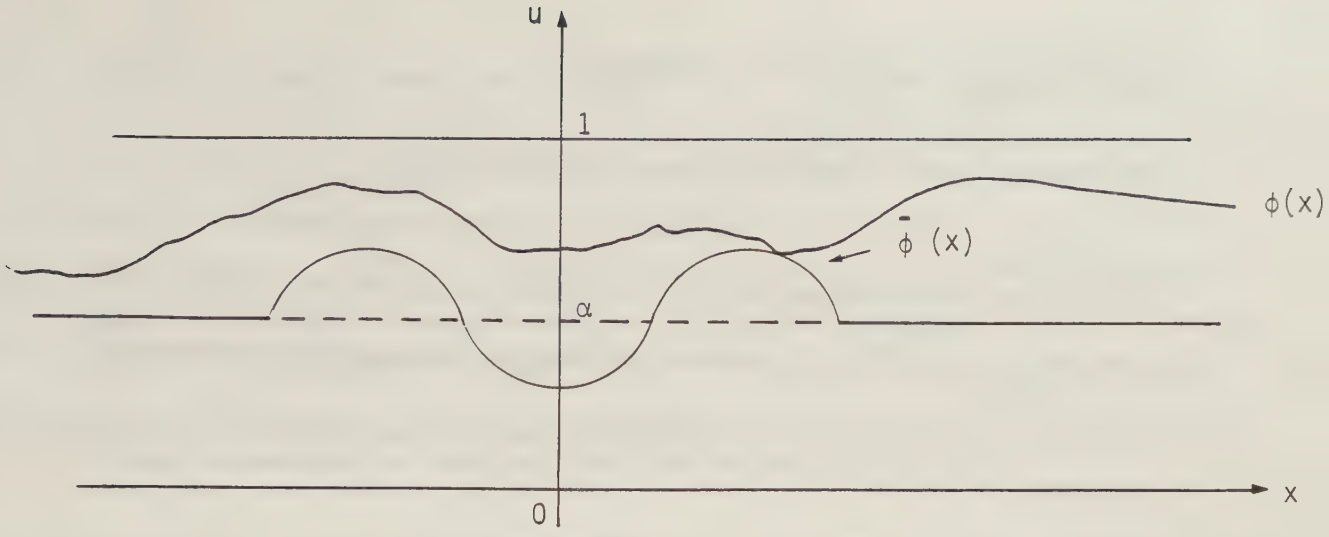


FIGURE 3.3.

Remarques :

1°) Il existe une différence entre les deux états stables 0 et 1 : ϕ peut être dans le domaine d'attraction de 0, appelé état dominant même si $\phi=1$ à l'extérieur d'un intervalle borné, tandis que, pour l'état 1, il n'en est pas de même.

2°) Le résultat de la proposition 3.6 peut être amélioré (Fife-Mac Leod [21]) : Soit $\eta>0$ donné. Il existe L dépendant de η tel que si, $\phi(x) \leq \alpha-\eta$ pour $|x| < L$, alors la solution $u(x,t)$ de (3.4) ayant ϕ pour condition initiale vérifie :

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \quad .$$

b)- Ondes de propagation

Nous rechercherons uniquement les ondes de propagation $u(x,t) = U(x-ct)$ à valeurs dans $[0,1]$, joignant les états stationnaires 0 et 1.

b_1)- Existence

Nous citerons deux propositions (Fife [20]) concernant l'existence de telles ondes, ainsi que les démonstrations de ces propositions. Dans ce qui suit nous supposerons que :

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f \text{ est } C^1.$$

Proposition 3.8. (A.W. [1] ou Fife [20])

On suppose que f vérifie de plus l'hypothèse

(H1) : $f'(0) > 0$; $f'(1) < 0$; $f > 0$ sur $]0,1[$.

Alors pour toute valeur de c vérifiant la condition (α) : $c \leq -4\nu$, où $\nu = \sup_{u \in]0,1]} \frac{f(u)}{u}$, il existe un front de propagation de vitesse c joignant 0 à 1. La condition (α) n'est pas nécessaire car il existe en fait une vitesse maximale c^* :

$$-\sqrt{4\nu} \leq c^* \leq -\sqrt{4f'(0)}$$

telle que pour tout $c \leq c^*$ il existe un front de propagation.

Proposition 3.9. ([1] ou [20])

On suppose que f vérifie l'hypothèse

(H2) : $f'(0) < 0$; $f'(1) < 0$; f a un seul zéro dans $]0,1[$.

Alors il existe une seule valeur de c telle qu'il existe un front de propagation de vitesse c joignant 0 à 1.

Avant de démontrer ces propositions nous décrirons le comportement de U, sans hypothèse supplémentaire sur f.

Préliminaires

La fonction U recherchée est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$(3.7) \qquad U'' + c\,U + f(U) = 0 \qquad U(0) = U(1) = 0, \quad U \in [0,1].$$

1°) U est strictement monotone

Ceci correspond pour (3.4) à un front de propagation. En effet on peut associer à U une trajectoire joignant les points critiques (0,0) à (1,0) dans le plan de phases (U,P). Le couple (U,P) est solution du système :

$$(3.8) \qquad \begin{cases} \dfrac{dU}{dz} = P \\ \dfrac{dP}{dz} = -c\,P - f(U) \end{cases}$$

Cette trajectoire reste dans la bande $0 \leq U \leq 1$, est dirigée vers la droite si $P > 0$, vers la gauche si $P < 0$. La seule possibilité est donc ici $P \geq 0$ sur toute la trajectoire. Si elle contenait un point $(U_o,0)$ avec $U_o \in]0,1[$ alors il existerait une onde telle que $U(0) = U_o$, $U'(0) = 0$. Si $U''(0)$ était égal à 0, $U \equiv U_o$ serait solution de (3.7), ce qui est impossible à cause de l'unicité des solutions de (3.7). Par conséquent, $U''(0)$ n'est pas nul et P changerait de signe en U_o, ce qui est de nouveau impossible. La fonction P est donc strictement positive tout au long de la trajectoire. L'onde recherchée est donc un front de propagation.

2°) Les points critiques (0,0) et (1,0) de (3.7) sont, soit tous deux des points selle, soit l'un est un noeud et l'autre un point selle.
A tout front de propagation U, est associée une fonction $P(U)$ définie et strictement positive sur $]0,1[$ et qui vérifie :

$$(3.9) \qquad \begin{cases} P(0) = 0 \quad , \quad P(1) = 0 \\ P' + \dfrac{f}{P} = -c \end{cases}$$

On en tire : $-\int_o^1 f(u)\,du = c \int_o^1 P(U)\,dU$. La vitesse c de l'onde est donc du signe opposé à $\int_o^1 f(u)\,du$.

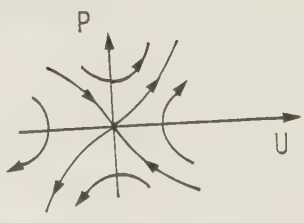
N.B. : à toute onde joignant (0,0) à (1,0), il correspond une onde de vitesse $-c$ joignant (1,0) à (0,0).

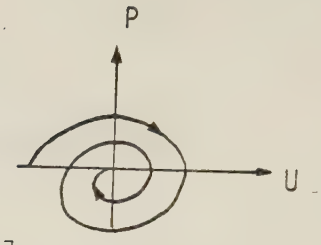
L'existence d'une orbite du système (3.8) joignant (0,0) à (1,0) dépend fortement du type de ces points critiques. Une linéarisation au voisinage de (0,0) conduit à :

$$\frac{dW}{dz} = A\,W \quad \text{avec} \quad W = \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(0) & c \end{pmatrix}$$

Trois cas se présentent :

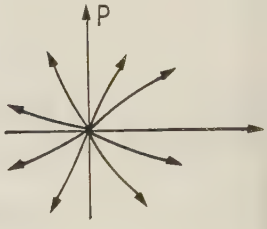
a) $f'(0)<0$: A possède 2 valeurs propres de signes opposés (0,0) est un point selle.





b) $f'(0)>0$ et $c^2 < 4\, f'(0)$

A possède 2 valeurs propres complexes
(0,0) est le centre d'une spirale
Il ne peut pas exister de front à valeurs dans [0,1]



c) $f'(0)>0$ et $c^2 > 4\, f'(0)$

A possède 2 valeurs propres de même signe.
De l'égalité $\frac{dU}{dz} = P$, on déduit que (0,0) est un point source et par conséquent λ_1 et λ_2 sont positives, et c est négatif.

Une étude analogue pour le point (1,0) pourrait être faite. Si (1,0) était un noeud, on en déduirait $c>0$. Par conséquent, il ne peut exister de front de propagation joignant deux noeuds. Il reste à étudier les orbites de type noeud-selle et selle-selle.

Etudions ces deux cas, qui correspondent pour f à supposer $f'(1) < 0$ et $c^2 > 4\, f'(0)$.

(i)- Démonstration de la proposition 3.8 : (Cas d'une orbite noeud-selle)

On suppose que f vérifie (H1). Le point (0,0) est un point source, (1,0) est un point selle. Sous (H1), on a $\int_0^1 f(u)\, du > 0$, ce qui implique que la vitesse c recherchée est strictement négative et telle que $c^2 > 4\, f'(0)$.
Le point (1,0) est un point selle, il existe donc une trajectoire unique T arrivant en (1,0) "de la gauche et par le haut" (figure 3.4).

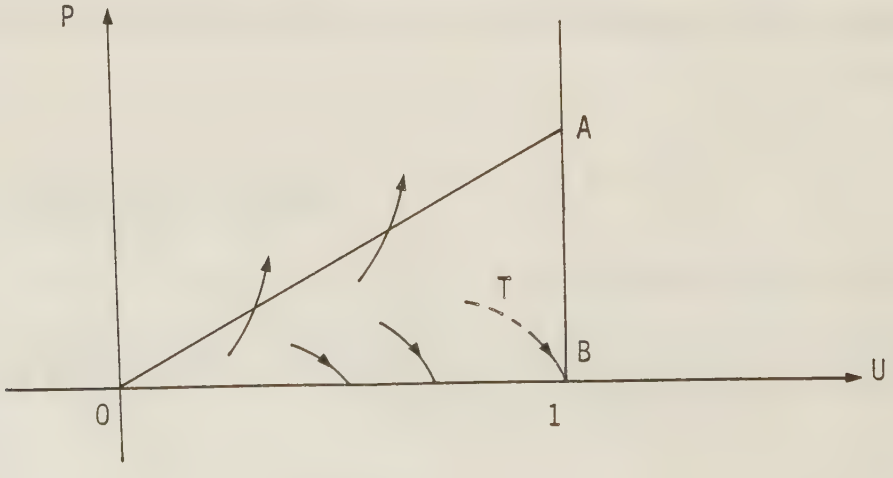


FIGURE 3.4.

Soit $\mu>0$ donné et soit OA la droite d'équation $P = \mu U$. Nous allons suivre la trajectoire T dans le triangle OAB. Elle doit conduire à un autre point critique du triangle fermé ou bien traverser la frontière. Les seuls points critiques sont $(0,0)$ et $(1,0)$, donc si T conduit à un point critique la démonstration est terminée. Considérons la possibilité que T traverse la frontière. De (3.8) on déduit que U est strictement croissante sur T, il s'ensuit que T ne peut atteindre le côté AB. Pour $P>0$ petit et $U \in]0,1[$, on a :

$$\frac{dU}{dP} = \frac{P}{-cP - f(U)} < 0 \quad .$$

Les trajectoires approchant le segment OB viennent de "la gauche". T ne peut donc atteindre ce côté en un point où $U>0$. Sur la ligne diagonale OA, P vérifie :

$$\frac{dP}{dU} = -c - \frac{f(U)}{P} \geq -c - \frac{\nu U}{P} \geq -c - \frac{\nu}{\mu}$$

où $\nu = \sup_{u \in]0,1]} \frac{f(u)}{u} \geq f'(0)$

Si le nombre μ vérifie la condition :

$$(\alpha) \qquad -c - \frac{\nu}{\mu} \geq \mu \qquad \text{soit encore} \qquad c \leq -\sqrt{4\nu} < 0 \quad ,$$

alors toute trajectoire traversant OA vient "de la gauche". Par conséquent si (α) est vérifiée, la seule possibilité est que T arrive au point $(0,0)$. Ceci clôt la démonstration.

Remarque :

Sous l'hypothèse $f(u) \leq uf'(0)$ (cas particulier étudié par Fisher [22] et K.P.P. [30], la vitesse c^* définie dans la proposition 3.8 est telle que $c^* = -\sqrt{4f'(0)}$.

(ii)- Démonstration de la proposition 3.9. : (Cas d'une orbite selle-selle)

On suppose que f vérifie (H2). Les points $(0,0)$ et $(1,0)$ sont des points selle. A chaque valeur de c est associée une seule trajectoire T_c issue de $(0,0)$ et située dans le premier quadrant. De (3.9) on déduit que P' est borné dès que P est loin de 0. Par conséquent cette trajectoire quitte la bande

$Q = \{U \in]0,1[,\ P>0\}$ en un point (U_c, P_c) tel que, soit $0 < U_c \leq 1$ et $P_c = 0$, soit $U_c = 1$ et $P_c > 0$ (car U est strictement croissante si P est positif strictement).

Nous utiliserons un lemme de monotonie dû à Kanel [27].

Lemme : On suppose que $f(u) \leq 0$ pour u proche de 0. Soient $P_{c_1}(U)$ et $P_{c_2}(U)$ deux solutions associées respectivement à c_1 et à c_2 de l'équation :

$$\begin{cases} P' = -c_i - \dfrac{f}{P} \\ P(0) = 0 \end{cases}$$

Alors si $c_1 > c_2$, $P_{c_1}(U) < P_{c_2}(U)$ dès que $P_{c_1}(U) > 0$ et $U > 0$.

Pour fixer les idées nous supposerons $\int_0^1 f(u)\,du > 0$ (la vitesse c est donc négative). Pour $|c|$ grand, P est croissante sur T_c (un raisonnement par l'absurde montre que P ne peut avoir de maximum sur T_c). Dans ce cas le point (U_c, P_c) est donc tel que $U_c = 1$, $P_c = 0$. Quand c croît, $P_c(U)$ décroît d'après le lemme. Soit c_o la vitesse telle que T_{c_o} atteigne Ox (cf. Figure 3.5). Deux cas sont possibles : $U_{c_o} = 1$ ou $U_{c_o} < 1$. Ce deuxième cas est possible si T_c diminue de la façon montrée sur la figure 3.5.

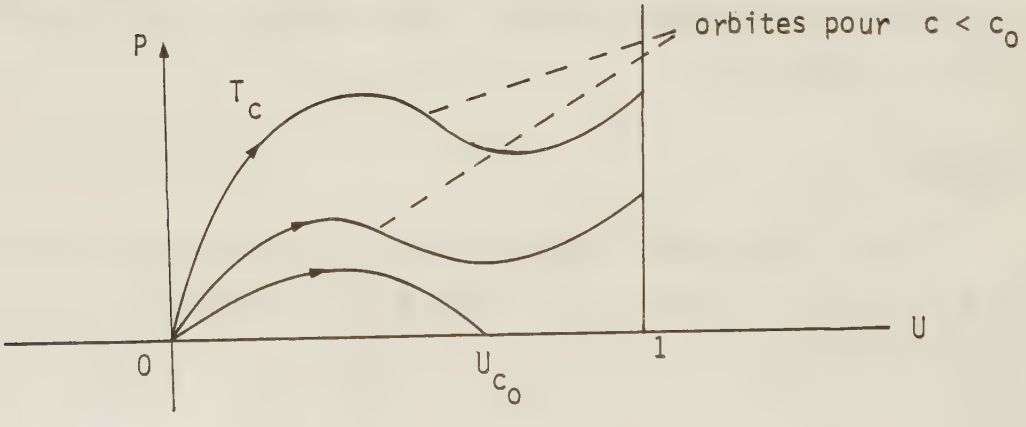


FIGURE 3.5.

Nous allons montrer que ce deuxième cas est impossible si f a un seul zéro dans $]0,1[$.

Considérons une valeur c légèrement inférieure à c_o. La courbe T_c ayant au moins deux extrema, P'_c a deux zéros dans $]0,1[$, soit U_c^1 et U_c^2 avec $U_c^1 < U_c^2$. Ce dernier vérifie :

$$\lim_{c \uparrow c_o} U_c^2 = U_{c_o} \quad , \qquad \lim_{c \uparrow c_o} P(U_c^2) = 0 \quad .$$

Les points U_c^1 et U_c^2 sont tels que :

$$-c = \frac{f(U^1{}_c)}{P(U^1{}_c)} = \frac{f(U^2{}_c)}{P(U^2{}_c)} \quad .$$

On en déduit que :

$$f(U_c^1) > 0 \; ; \; f(U_c^1) > f(U_c^2) \quad \text{et} \quad \lim_{c \uparrow c_o} f(U_c^2) = 0$$

Par conséquent, le point U_{c_o} est un zéro de f. Ce n'est pas le premier zéro, car on a supposé que $f(u)$ est négative pour $u>0$ proche de 0 et, d'après ce qui précède, $f(U_{c_o}^1)$ est strictement positive.

b_2)- Stabilité des ondes de propagation

Il n'est pas toujours possible de montrer la convergence des solutions vers une onde précise, et différentes notions de convergence ont été introduites :

α). Convergence en forme vers un front de propagation (Stockes [42]) :
A une solution $u(x,t)$ de (3.4) telle que $0 \leq u \leq 1$ et $u(x,t) \to 0$ quand $x \to -\infty$, on associe la fonction $\gamma(u,t)$ définie par :

$$\gamma(u,t) = \frac{\partial u}{\partial x}\,(x(t,u),t) \qquad \text{où } x(t,u) = \inf \{x \; ; \; u(x,t) = u\}$$

On peut montrer que, sous certaines conditions :

$$\lim_{t \to \infty} \gamma(u,t) = P(u) \qquad \text{où } P \text{ est la fonction définie en (3.9)}$$

β) Comportement de la solution $u(x,t)$ en tant que fonction du temps

On pose $\xi = x-ct$. On étudie $\lim_{t\to\infty} u(\xi+ct,t)$ selon la position de c par rapport à la vitesse de module minimum c^*. (A.W. [1]).

γ) On associe à une solution u de (3.4), telle que $0 \le u \le 1$,

$\bar{x}(t) = \max \{x,\ u(x,t) = \beta\}$

$\underline{x}(t) = \min \{x,\ u(x,t) = \beta\}$ avec $0 < \beta < 1$ donné

Alors sous certaines conditions :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\bar{x}}{t} = \lim \frac{\underline{x}}{t} = c^* \qquad [1]$$

Nous énoncerons ici des résultats classiques de convergence :

(i) Convergence vers une vague précise (Fife-Mac Leod [21])

Proposition 3.10 : On suppose que f vérifie (H2). Si la condition initiale ϕ vérifie :

$$\limsup_{x\to-\infty} \phi(x) < \alpha \quad , \quad \liminf_{x\to+\infty} \phi(x) > \alpha$$

alors il existe des constantes z_o, c, K, w $(K, w > 0)$ telles que :

$$|u(x,t) - U(x - ct - z_o)| < K e^{-wt} \qquad \text{pour } t \text{ suffisamment grand.}$$

(ii) Convergence en forme vers une vague (K.P.P. [30])

Proposition 3.11 : On suppose que f vérifie (H1) et que de plus $f(u) \le uf'(0)$ sur $[0,1]$. On désigne par $u(x,t)$ la solution ayant pour condition initiale $\phi(x) = 1_{]0,+\infty[}(x)$. Alors il existe une fonction $\psi(t)$ telle que :

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t) - U(x - c^*t - \psi(t))| = 0 \qquad \text{mais} \quad \psi(t) \not\to 0$$

avec $c^* = -\sqrt{4f'(0)}$. De plus $\lim_{t\to\infty} \psi'(t) = 0$.

Il y a seulement convergence en forme vers une onde.

(iii) Vagues tirées - Vagues poussées (Stockes [41])

Dans le cas d'orbites noeud-selle (par exemple f vérifie (H1)), on distingue deux sortes de vagues. On a vu (3.2.1,b_1) qu'il existe des ondes de propagation de vitesse c, si c est tel que $c \leq c^* \leq -\sqrt{4f'(0)}$. Les vagues de vitesse $|c| = \sqrt{4f'(0)}$ sont appelées vagues tirées [41], car si f(u) mesure un taux de reproduction, la vitesse de propagation de la vague est déterminée par la fécondité des pionniers, c'est-à-dire des individus situés sur le bord directeur. Il existe des théorèmes (Kanel [27], Sattinger [39]) montrant que, si ce bord directeur n'est pas modifié (dans un certain sens), une onde de propagation, après pertubation, tend vers exactement les mêmes valeurs qu'elle aurait atteintes sans pertubation.
Si f(u) ne vérifie pas la condition $f(u) \leq u\, f'(0)$, alors il n'existe des ondes de propagation que pour $c^2 \geq c^{*2} \geq 4\, f'(0)$. La vague de vitesse c^* est appelée vague poussée, car la vitesse de la propagation n'est pas déterminée par le bord directeur mais par une autre zône de l'onde de propagation.

3.2. - Simulation de processus de branchement non homogène saturés

Ces simulations ont été faites pour observer l'évolution spatio-temporelle de processus de branchement non homogènes, construits en poursuivant les idées développées dans le chapitre II. Dans le premier paragraphe nous présentons comment sont construits les processus non homogènes que nous considèrerons, ainsi que l'ensemble des résultats que nous conjecturons pour ces processus. Les simulations sont présentées in extenso dans le deuxième paragraphe. Elles ont été conçues de façon à ce que soit possible une confrontation des différents résultats. Le troisième paragraphe est consacré à l'étude des vitesses des ondes de propagation de l'équation différentielle théorique : $\frac{\partial \beta}{\partial t} = L\,(-\frac{\partial \beta}{\partial x}) + S(\beta)$ associée aux processus de branchement que nous avons simulés (la fonction L est le Log Laplace de la mesure μ et S représente une fonction de saturation). Dans le dernier paragraphe figurent les résultats obtenus dans les simulations, ainsi que leur discussion. Nous observons que les calculs théoriques surestiment de façon systématique les vitesses de propagation observées. Ceci nous amène à introduire un terme correctif, grâce auquel la comparaison entre résultats théoriques et résultats observés est satisfaisante.

3.2.1. - Présentation des résultats conjecturés

Nous présenterons successivement ces résultats pour des processus inhomogènes, et pour des processus inhomogènes saturés.

a) Processus non homogènes à temps continu

Les notations sont les mêmes qu'au chapitre II. A un individu né à l'instant σ situé en a, on associe un couple de variables aléatoires $(\xi_{\sigma,a}, \lambda)$ où $\xi_{\sigma,a}$ est une mesure ponctuelle sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ d'intensité $\mu(\sigma,a\ ;\ t,x)$, et λ une variable aléatoire positive. La variable λ représente la durée de vie de l'individu considéré, et $\xi_{\sigma,a}$ est son processus de reproduction. De la même façon que précédemment, on définit les familles :

$$L(\sigma,\ a\ ;\ \theta,\ \eta) = \text{Log} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} e^{\theta t + \eta x}\, d\mu(\sigma,\ a\ ;\ t,\ x)$$

$h(\sigma,\ a\ ;\ t,\ x)$ désigne la transformée de Cramer de $\mu(\sigma,\ a\ ;\ t,\ x)$.

A T réel positif, et ϕ un chemin de $[0,T] \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on associe l'intégrale d'action $I(T,\ \phi)$:

$$I(T,\ \phi) = \int_0^T h(\phi(s)\ ;\ \dot{\phi}(s))\, ds \quad .$$

Soit $\zeta_t^{\varepsilon}(I) = \zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(\frac{I}{\varepsilon})$ = card {personnes en vie à $\frac{t}{\varepsilon}$ dans $\frac{I}{\varepsilon}$} (cf. chapitre II).

Proposition 3.12 (conjecturée)

Si l'intervalle I est de la forme $[x-\delta(\varepsilon),\ x+\delta(\varepsilon)]$ où $\delta(\varepsilon)$ est tel que : $\delta(\varepsilon) \to 0$ et $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \to 0$. Alors on a :

(i) $\varepsilon\ \text{Log}\ E\ \zeta_t^{\varepsilon}(I) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \beta(t,x) = -\inf_T \inf_{\phi \in \Gamma_{t,x}} I(T,\phi)$

où $\Gamma_{t,x} = \{\phi : [0,T] \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\ ;\ \phi(0)=(0,0),\ \phi(T) = (t,x),\ \text{et } \phi \text{ est } C^1\}$

(ii) $\beta(t,x)$ est solution de l'équation :

$$L(t,x\ ;\ -\frac{\partial \beta}{\partial t},\ -\frac{\partial \beta}{\partial x}) = 0 \qquad (3.10)$$

iii) $\varepsilon \operatorname{Log} \zeta^{\varepsilon}_{t}(I) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{P} \alpha(t,x) = - \inf_{T} \inf_{\gamma \in \Gamma'_{t,x}} I(T,\phi)$

où $\Gamma'_{t,x} = \{\gamma \in \Gamma_{t,x} \ \forall\, s \leq T \quad I(s,\phi) < 0\}$

Esquisse de la démonstration

L'infimum sur T vient de ce que nous étudions un problème en temps libre. A T fixé, (iii) a été démontré pour des processus de sauts Markoviens ([43], [4]). Le résultat en espérance $\varepsilon \operatorname{Log} E\, \zeta^{\varepsilon}_{t}(I)$ se déduit du résultat pour une seule particule. Le fait que $\beta(t,x)$ soit solution de l'équation (3.10) est classique et provient de ce qu'on minimise une fonctionnelle de type Hamilton-Jacobi. Ici la fonction h s'interprète comme un Lagrangien et L comme un Hamiltonien. Par conséquent, la fonction $\beta(t,x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles associée à ce problème variationnel ([16]). Pour ces équations, il n'y a pas unicité des solutions, car il se produit des chocs au bout d'un temps fini. Cependant la fonction $\beta(t,x)$ recherchée correspond à une solution particulière de l'équation (3.10), qui est précisément la solution entropique d'une équation d'Hamilton-Jacobi. Ceci indique quels schémas numériques adopter pour la calculer [24].

La contrainte imposée aux chemins ϕ dans (iii) correspond à la description du phénomène global, et signifie qu'en tout point (s,y) de ϕ il y a, en probabilité pour le processus total ζ^{ε}_{t} un grand nombre d'individus en vie (de l'ordre de $\exp\left(-\varepsilon \int_{0}^{s} h(\phi(s), \dot{\phi}(s))\, ds\right)$. Nous ne savons pas encore de quelle inéquation aux dérivées partielles la fonction α est solution (si ce n'est dans le domaine où α coïncide avec β). L'obtention d'un résultat précis pour α passe par la découverte du cheminement probable des ancêtres d'un individu situé en x à l'instant t.

Remarque :

Dans le cas d'un processus homogène en temps continu (cf. chapitre II), la fonction $\alpha(t,x)$ est telle que :

$$\alpha(t,x) = \sup\left(- \inf_{\beta > 0} \frac{1}{\beta} h(\beta t, \beta x) \ ; \ 0\right)$$

Le chemin optimal est connu ; il est atteint pour $T = \frac{t}{\bar{t}}$, et le chemin

$\phi : [0,T] \longrightarrow R^{+} \times R$

$u \longmapsto (u\bar{t}, u\bar{x})$ où $\bar{t} = \beta(t,x)t$; $\bar{x} = \beta(t,x)x$; $\beta(t,x)$

est le point où l'infimum définissant $\alpha(t,x)$ est atteint (cf. chapitre II). A T fixé, le chemin direct réalise l'inf des $I(T,\phi)$ à cause de la convexité de h.

Conséquence :

Pour un processus non homogène en temps discret l'équation (3.10) se simplifie en :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = L\left(t,x\ ;\ -\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) \tag{3.11}$$

b) Processus non homogène saturé

C'est le cas où le processus de reproduction d'un individu né à l'instant σ situé en a dépend de l'effectif des individus en vie à l'instant σ dans un voisinage de a : $\mu \rightsquigarrow \mu\,(t,x,\alpha(t,x)\ ;\bullet,\bullet)$. Cette dépendance se fait par l'intermédiaire de la fonction α (cela n'aurait pas de sens de la faire dépendre de β). Les intégrales d'action $I(T,\phi)$ dépendent maintenant de α. Nous conjecturons qu'il existe encore une ε-Log densité limite déterministe, qui est un point fixe de l'application :

$$\alpha \to \gamma = \left\{(t,x) \to -\inf_{T}\ \inf_{\phi\in\Gamma'_{t,x}} I(T,\phi,\alpha)\right\}$$

où $I(T,\phi,\gamma) = \int_0^T h\,(\phi(u),\gamma(\phi(u))\ ;\ \dot{\phi}\,(u))\,du.$

Nous pensons montrer que pour les petites valeurs de t, l'application ci-dessus est une contraction de $L^{\infty}([0,t]\times\mathbb{R})$, et ainsi nous obtiendrons une caractérisation de $\alpha(t,x)$.

Nous nous intéresserons au cas particulier où la saturation a seulement pour effet de modifier en module le processus de reproduction : l'intensité $\mu\,(\sigma,a;t,x)$ du processus de reproduction d'un individu né à l'instant σ situé en a est telle que :

$$(HH) \qquad d\mu\,(\sigma,a\ ;\ t,x\ /\ \mathcal{F}_{\sigma}) = \exp\left[S\left(\varepsilon\ \mathrm{Log}\ \zeta_{\sigma}^{\varepsilon}\,(a-\delta,a+\delta)\right)\right] d\mu^{o}\,(t,x)$$

où $\mu^{o}(t,x)$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}$ donnée et S une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée représentant la saturation, δ un nombre positif dépendant de ε (cf. proposition 3.12).

Proposition 3.13. (conjecturée)

Soient $L^o(\theta,\eta)$ et $h^o(t,x)$ les fonctions associées à μ^o, et $I = [x-\delta, x+\delta]$. Sous (HH) on a :

(i) $$\varepsilon \text{ Log } E\ \zeta_t^\varepsilon(I) \to \beta(t,x) = \sup_T \sup_{\phi\in\Gamma_{t,x}} \int_0^T \{S(\beta(\phi(u))) - h^o(\dot{\phi}(u))\}\, du$$

(ii) $\beta(t,x)$ est solution de :

$$L^o\left(-\frac{\partial\beta}{\partial t}, -\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) + S(\beta) = 0 \qquad (3.12)$$

(iii) $$\varepsilon \text{ Log } \zeta_t^\varepsilon(I) \xrightarrow{P} \sup_T \sup_{\phi\in\Gamma''_{t,x}} \int_0^T \{S(\alpha(\phi(u))) - h^o(\dot{\phi}(u))\}\, du$$

où $$\Gamma''_{t,x} = \{\phi\in\Gamma_{t,x}\ ;\ \forall s\le T \quad \int_0^s [S(\alpha(\phi(u))) - h^o(\dot{\phi}(u))]\, du < 0\}$$

Conséquence :

Dans le cas particulier d'un processus saturé en temps discret, l'équation (3.12) se simplifie en :

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = L^o\left(-\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) + S(\beta) \qquad (3.13)$$

C'est ce dernier cas particulier qui a été simulé.

3.2.2. - Présentation de la simulation

Dans les simulations, l'espace des lieux est $\mathbb{Z}$; le temps est également discret. Chaque individu vit pendant une durée égale à l'unité et, à la fin de sa vie, a un nombre aléatoire d'enfants de loi G entière. Ces enfants sont situés sur la droite à une distance du père aléatoire, de loi μ_o indépendante de G. Si un individu a N enfants, les positions de ces enfants sont obtenues par N tirages indépendants de la loi μ_o. Ces enfants, à leur tour, vivent et se reproduisent de la même façon, indépendamment les uns des autres. Ce modèle est plus simple que ceux que nous avons étudiés jusqu'à présent. Ceci n'a pas d'importance, puisque seules les espérances interviennent dans les résultats théoriques qui nous intéressent. En effet, pour toute la partie concernant "l'ε-Log densité" $\alpha(t,x)$ et les vitesses de propagation, ce modèle conduit

aux mêmes résultats p.s. qu'un processus de branchement à temps discret (chapitre I), où les positions des enfants sont données par une réalisation d'un processus ponctuel d'intensité $\mu = m\mu_o$.
On introduit de plus le phénomène de saturation qui modifie seulement la loi de reproduction G. Cette modification est effectuée en fonction du nombre des individus présents dans un lieu et dans son voisinage à un instant donné.

a) Loi de dispersion μ_o

On choisit une loi de Bernouilli (p,q) sur {0,1} :

$$\mu_o = p\,\delta_o + q\,\delta_1$$

le paramètre p sera utilisé pour caractériser μ_o dans les simulations. Le logarithme de la transformée de Laplace de μ_o est :

$$L(\theta) = \text{Log}\,(p + q\,e^{\theta})$$

La transformée de Cramer de μ_o est par conséquent :

$$h_{\mu_o}(x) = x\,\text{Log}\,\frac{x}{q} + (1-x)\,\text{Log}\,\frac{1-x}{p} \qquad \text{si} \quad 0 < x < 1$$

$$h(0) = -\,\text{Log}\,p \quad ; \quad h(1) = -\,\text{Log}\,q \quad ; \quad h = +\infty \text{ sur } \mathbb{R} - [0,1].$$

L'espérance et la variance de μ_o sont :

$$E\,\mu_o = p \quad ; \quad \text{Var}\,\mu_o = pq$$

L'approximation de diffusion classique revient à assimiler le processus à une diffusion avec branchement ayant la loi G comme loi de scission. Dans nôtre cas, ceci revient à remplacer la loi de dispersion μ_o par une gaussienne de même espérance et même variance. En particulier, si la loi de dispersion μ_o est une loi de Bernouilli de paramètres (p,q), la transformée de Cramer h_{μ_o} est approximée par la parabole :

$$f(x) = \frac{1}{2pq}\,(x - q)^2.$$

Dans les simulations la loi de dispersion μ_o est donnée indépendamment du temps t et du lieu x.

b) Loi de reproduction

Dans les simulations l'effet de la saturation est de modifier la loi de reproduction G. On désigne par $G(t,x ; \cdot)$ la loi de reproduction d'un individu situé dans le lieu x à l'instant t.
Posons : $m(t,x) = E\, G(t,x ; \cdot)$

Soit $n(t,x)$ le nombre de personnes en vie à l'instant t dans le lieu x. La saturation modélise une situation où la loi de reproduction $G(t,x ; \cdot)$ dépend du nombre de personnes en vie à l'instant t dans un voisinage de x. Cette idée essentielle de voisinage est exploitée dans les simulations en associant à $n(t,x)$ une densité fictive $\bar{n}(t,x)$ représentant une moyenne pondérée des densités $n(t,y)$, où y appartient à un ensemble de lieux voisins de x. La loi $G(t,x ; \cdot)$ est construite à partir de $\bar{n}(t,x)$. Dans les simulations, $\bar{n}(t,x)$ est défini par :

$$\begin{cases} \bar{n}(t,x) = \sum_{i=-k}^{+k} a_i\, n(t, x+i) \\ \sum a_i = 1 \quad ; \quad a_i \geq 0 \qquad (\forall i). \end{cases}$$

Généralement k est égal à 1 ou 2, $a_{-i} = a_{+i}$.
La moyenne pondérée la plus utilisée est $(k=2 ; a_2=0.1 ; a_1=0.2 ; a_o=0.4)$
L'espérance $m(t,x)$ de $G(t,x ; \cdot)$ est une fonction de $\bar{n}(t,x)$:

$$m(t,x) = f(\bar{n}(t,x)).$$

La fonction f est continue, positive ou nulle, de maximum $F_o>1$, et telle que :

$$f(u) = 0 \quad \text{pour} \quad u \geq NS$$

L'hypothèse $F_o>1$ correspond au fait que le processus est supposé supercritique quand $\bar{n}(t,x)$ appartient à un intervalle contenant le point n_o où le maximum F_o est atteint (cf. Figure 3.6).

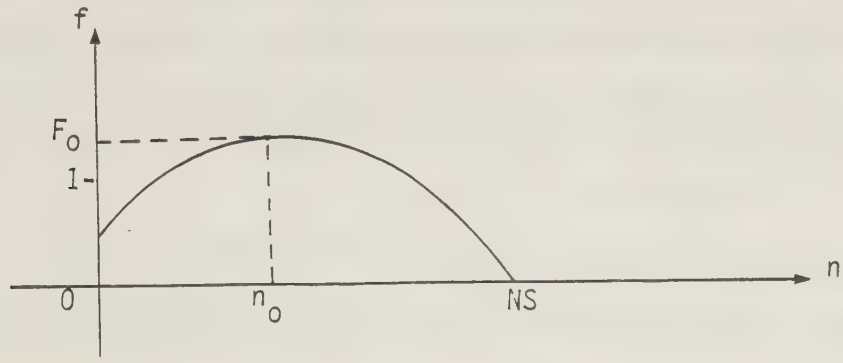


FIGURE 3.6

Nous supposerons dans les différentes simulations que :

$$M = \sup_{t,x} m(t,x) < 2.$$

De cette façon la population ne croît pas trop vite et les temps que la simulation exige pour parvenir à une situation stable ne sont pas trop longs.
Il suffit donc de choisir une famille $\{p_i(t,x)\}_{i\in\{0,1,2\}}$ pour obtenir $G(t,x;\cdot)$.
Posons : $p_i(t,x) = P$ (un individu situé en x à t ait i enfants). La famille des $p_i(t,x)$ doit vérifier :

$$(3.14)\quad \begin{cases} \sum_{0}^{2} p_i(t,x) = 1 \\ 0 \le p_i(t,x) \le 1 \\ p_1(t,x) + 2\, p_2(t,x) = m(t,x) \end{cases}$$

Soient α tel que : $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{F_o}$ et la famille $p_i(t,x)$ définie par :

$$\begin{cases} p_o(t,x) = 1 - \alpha\, m(t,x) \\ p_1(t,x) = (2\alpha - 1)\, m(t,x) \\ p_2(t,x) = (1 - \alpha)\, m(t,x) \end{cases}$$

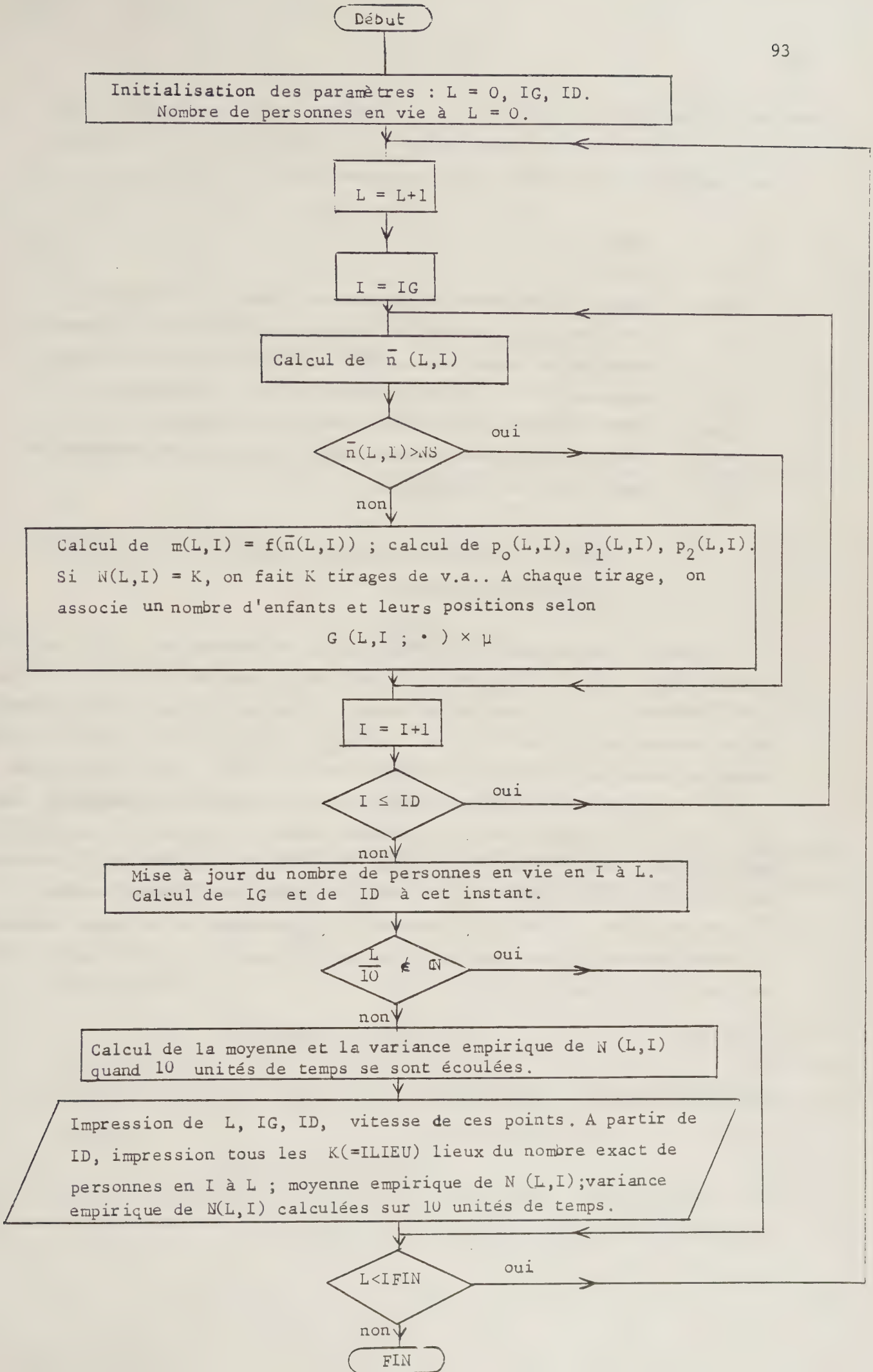
Cette famille vérifie (3.14) et la loi de reproduction $G(t,x\,;\,\cdot)$ sera obtenue ainsi dans les simulations.

Remarque :

Dans le modèle classique d'épidémie simple (Mollison [36]), la saturation se fait à l'arrivée et non au départ, comme ici. En effet la probabilité qu'un germe infecte une personne située dans un lieu x est proportionnel à $[N-y(x,t)]$ ($y(x,t)$ désigne le nombre de personnes infectées dans le lieu x et N le nombre maximum d'individus infectés dans un lieu donné), tandis que le taux d'émission de germes par individu reste constant. Ici l'effet de la saturation est de modifier ce taux d'émission, en fonction du nombre de personnes présentes en x au temps t.

c) Organigramme de la simulation

(Les notations utilisées dans cet organigramme sont données page 86).


Début
Initialisation des paramètres : L = 0, IG, ID.
Nombre de personnes en vie à L = 0.
L = L+1
I = IG
Calcul de $\bar{n}$ (L,I)
$\bar{n}(L,I) > NS$
oui
non
Calcul de m(L,I) = f($\bar{n}$(L,I)) ; calcul de $p_o(L,I)$, $p_1(L,I)$, $p_2(L,I)$.
Si N(L,I) = K, on fait K tirages de v.a.. A chaque tirage, on associe un nombre d'enfants et leurs positions selon
G (L,I ; •) × μ
I = I+1
I ≤ ID
oui
non
Mise à jour du nombre de personnes en vie en I à L.
Calcul de IG et de ID à cet instant.
$\frac{L}{10} \in \mathbb{N}$
oui
non
Calcul de la moyenne et la variance empirique de N (L,I) quand 10 unités de temps se sont écoulées.
Impression de L, IG, ID, vitesse de ces points. A partir de ID, impression tous les K(=ILIEU) lieux du nombre exact de personnes en I à L ; moyenne empirique de N (L,I);variance empirique de N(L,I) calculées sur 10 unités de temps.
L<IFIN
oui
non
FIN

Les notations utilisées dans cet organigramme sont :

L : temps,
I : lieu,
N(L,I) : nombre de personnes en vie dans le lieu I à l'instant L,
IG : position de la personne en vie la plus "à gauche" au temps L,
ID : position de la personne en vie la plus "à droite" au temps L,
m(L,I) : espérance de la loi de reproduction en I au temps L,
$\bar{n}$(L,I) : nombre pondéré des personnes dans un voisinage de I à L,
NS : nombre de personnes au-delà duquel il n'y a pas reproduction,
IFIN : temps final de la simulation.

3.2.3. - Vitesses de propagation calculées à l'aide de l'équation différentielle associée

Dans le cas de processus homogènes (μ indépendant de t et x), les vitesses de propagation s'obtiennent directement, sans avoir recours à l'équation différentielle : la population occupe le cône de l'espace-temps engendré par le domaine où $\{h(t,x) \leq 0\}$, où $x = (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k$ et h est la transformée de Cramer de la mesure μ définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k$. Ceci se traduit en vitesses de propagation dans les différentes directions de l'espace (cf. chapitres I et II). Par contre pour des processus saturés, l'étude de l'équation différentielle associée est essentielle. Afin de mettre en évidence les phénomènes, nous ne nous intéresserons qu'à un cas particulier de processus saturés : l'espace des lieux X est de dimension 1, le processus est en temps discret et la saturation modifie seulement la masse de l'intensité du processus de reproduction (c'est l'hypothèse (HH)) :

$$\mu \longrightarrow \mu\,(t,x\,;\,\cdot) = \mu(\cdot)\ e^{S(\alpha(t,x))}$$

La fonction $\beta(t,x)$ est solution de (3.13) :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = L\left(-\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) + S(\beta)\ .$$

Nous supposons qu'il existe des densités β pour lesquelles le processus étudié est supercritique. Par conséquent, la fonction $S(\beta)$ est strictement positive

sur un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}^+$. Nous ferons l'hypothèse que dans le domaine où $\beta \geq 0$, la fonction S est concave, et que S est constante pour $\beta < 0$ (Figure 3.7).

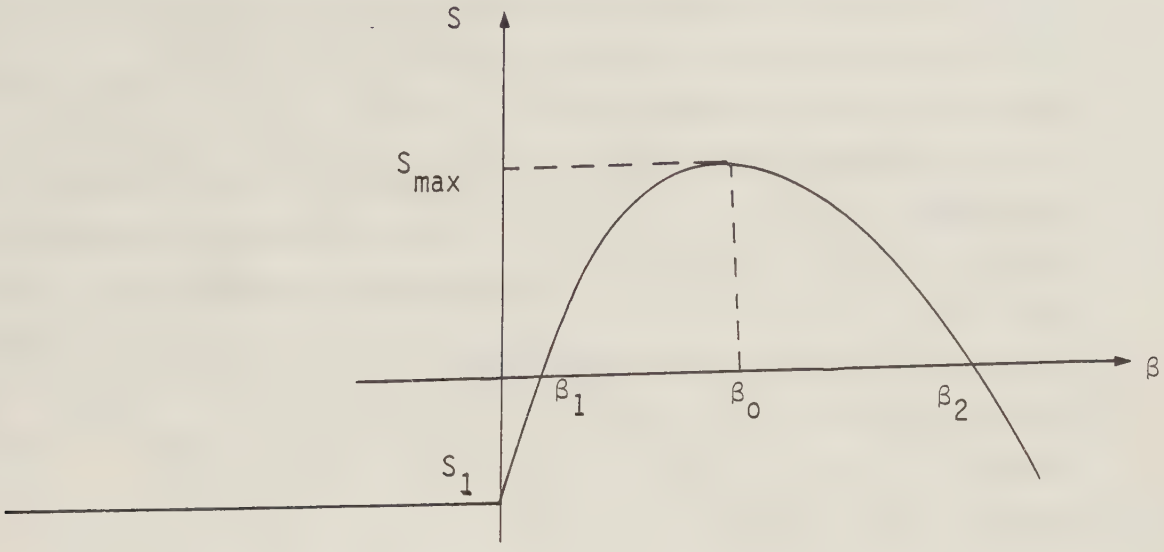


FIGURE 3.7.

Proposition 3.14

La vitesse c_o de la propagation de l'extrémité droite (respectivement gauche) de la zône peuplée est la plus grande racine (resp. petite) de l'équation :

$$h(c_o) = S_{max} \qquad (3.15)$$

Démonstration

Nous étudions, pour calculer cette vitesse, les ondes de propagation de l'équation d'évolution (3.13). Ce sont les solutions de la forme : $\beta(t,x) = b(x-ct)$. Posons $\xi = x - ct$. La fonction b est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$-c \frac{db}{d\xi} = S(b) + L\left(-\frac{db}{d\xi}\right)$$

soit encore :

$$(c - L)\left(-\frac{db}{d\xi}\right) = S(b) \qquad (3.16)$$

Etudions d'abord la propagation de l'extrémité droite de la zône peuplée. Pour celà, considérons le processus constitué par une seule particule se déplaçant sur $\mathbb{R}$ selon une marche aléatoire dont la loi des sauts est μ. Ce processus "minore" (au sens de Mollison [37]) le processus étudié, conditionnellement à sa non extinction. La vitesse c de la propagation vers la droite, est donc strictement supérieure à $E\mu$ (vitesse moyenne pour une particule). De façon analogue, couplons le processus étudié avec un processus homogène de loi de dispersion μ et ayant une loi de reproduction d'espérance $F_o = \sup_{t,x} m(t,x)$. Ce processus "majore" le processus étudié. Pour ce processus la vitesse du point le plus à droite est la plus grande racine c_o de : $h(c) = \text{Log } F_o = S_{max}$ (cf. chapitre I). De plus au-delà de $c_o t$ il n'y a, à l'instant t, presque sûrement personne. Par conséquent, on obtient :

- pour x fixé $\quad (\exists\, T_o) \qquad t \geq T_o \Longrightarrow \beta(t,x) = 0$
- la vitesse c de l'extrémité droite de la zône peuplée est telle que :

$$E\mu < c \leq c_o$$

La fonction $(c - L)$ est strictement concave, puisque L est convexe. Soit u_o le point où $(c - L)$ atteint son maximum T_c. On a les égalités :

$$L'(u_o) = c \qquad ; \qquad T_c = L'(u_o)u_o - L(u_o) = h(c)$$

Le point u_o est nécessairement positif, car $(c-L)'(0) = c - E\mu > 0$. Par conséquent le graphe de $(c-L)$ a la forme suivante (Figure 3.8) :

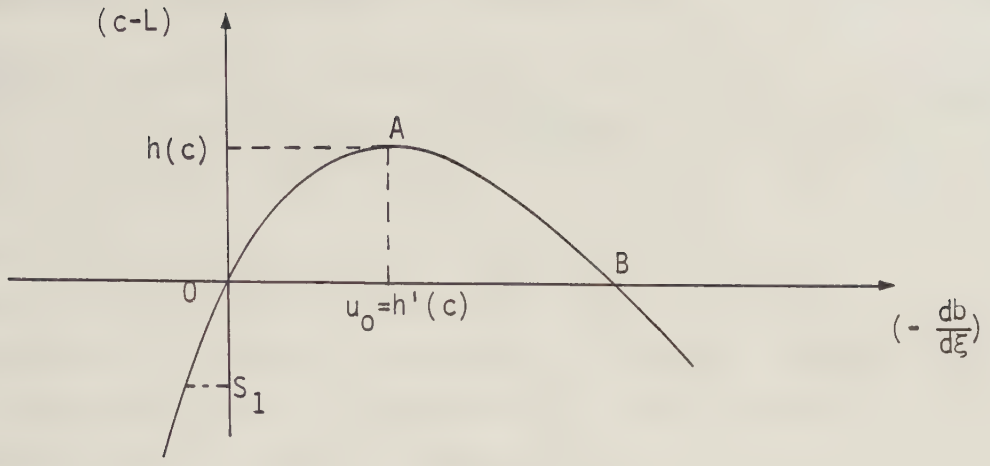


FIGURE 3.8.

Les fonctions L' et h' sont inverses l'une de l'autre, d'où on tire que : $u_o = h'(c)$.

Pour $c<c_o$, $h(c)$ est inférieur à S_{max}. Soient β_3 et β_4 les valeurs pour lesquelles $S(\beta) = h(c)$. (Figure 3.9).

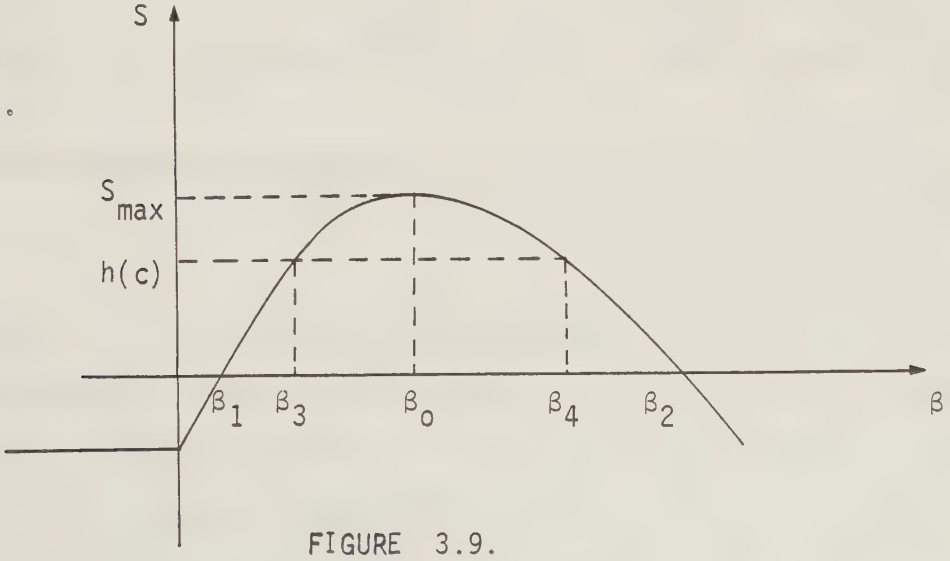


FIGURE 3.9.

Une description des solutions de (3.16) s'obtient en comparant les graphes de $(c - L)$ et de S. Par exemple, quand $(-\frac{db}{d\xi})$ décrit la branche $\overrightarrow{OA}$, b décroît de β_2 à β_4 ; les branches $\overrightarrow{AO}$ correspond à une décroissance de b de β_3 à β_1,..., etc.
Les pentes en β_3 et β_4 de b sont $-h'(c)$. Les solutions b correspondant à ce cas $c<c_o$ sont représentées sur la figure 3.10

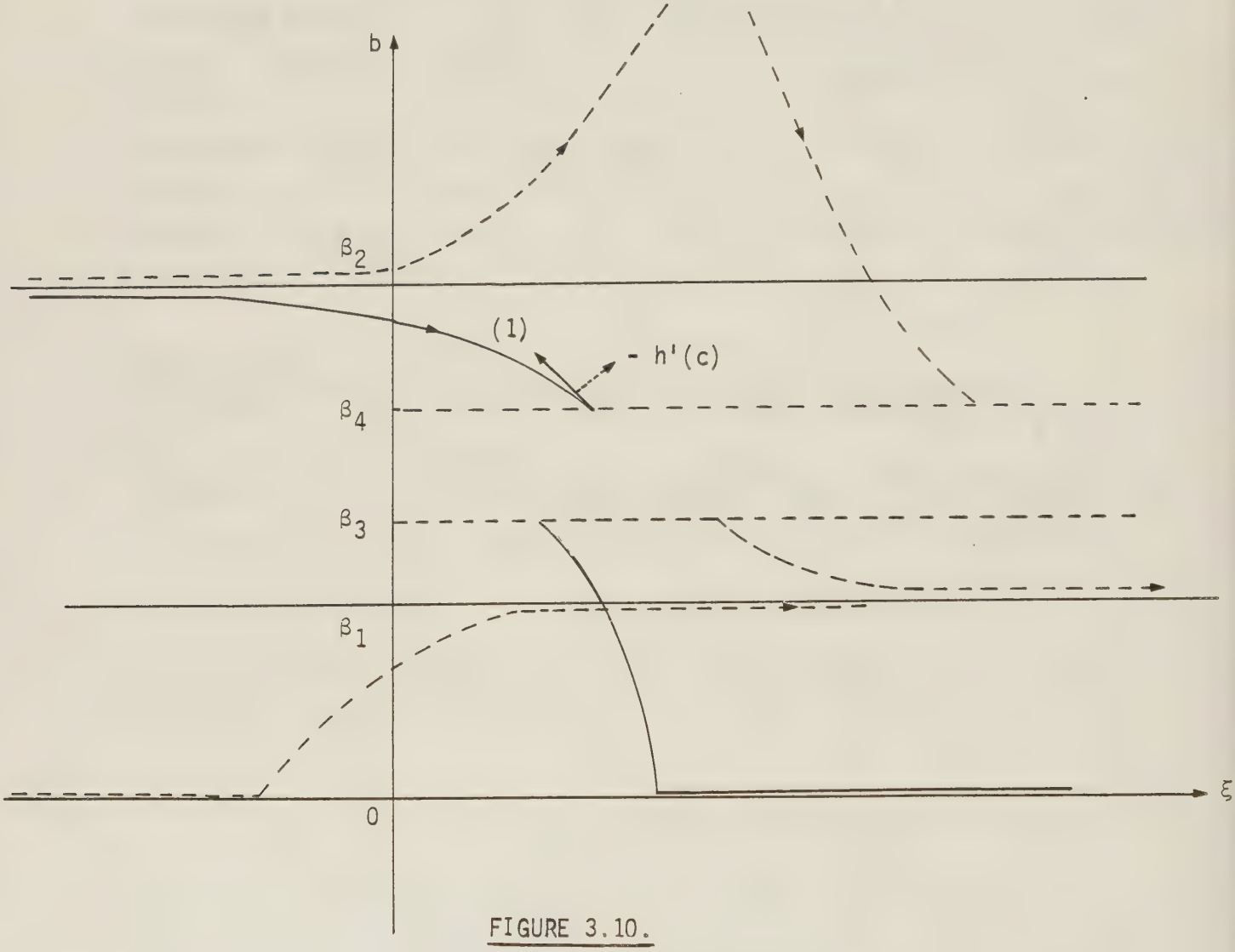


FIGURE 3.10.

Il est clair que seules les solutions dessinées en trait plein peuvent correspondre dans la situation présente à un front de propagation.

Dans le cas où $c<c_o$, les solutions propagatoires s'arrêtent. Soit (a) la solution obtenue en regroupant (1) et (2) (cf. figure 3.11) de façon qu'il existe ξ_o tel que $b(\xi_o^-) = \beta_4$ et $\beta(\xi_o^+) = \beta_3$.

Fixons un instant t_o grand et soit t un instant tel que t soit grand devant ε et petit devant 1. On suppose que, à l'instant ct_o, la population possède une "ε-log densité" qui a la forme de (a). Pour obtenir la répartition de la population à l'instant $c(t_o + t)$, on "découpe" la population en "tranches" de taux de reproduction constants (ceci est possible car t est petit devant 1). A chacune de ces tranches on applique le résultat de Biggins [9], qui décrit la forme de la population. Les enfants des individus situés au niveau β sont situés selon la transformée de Cramer renversée de $\mu e^{S(\beta)}$ et sont répartis jusqu'au niveau 0 (figure 3.11.).

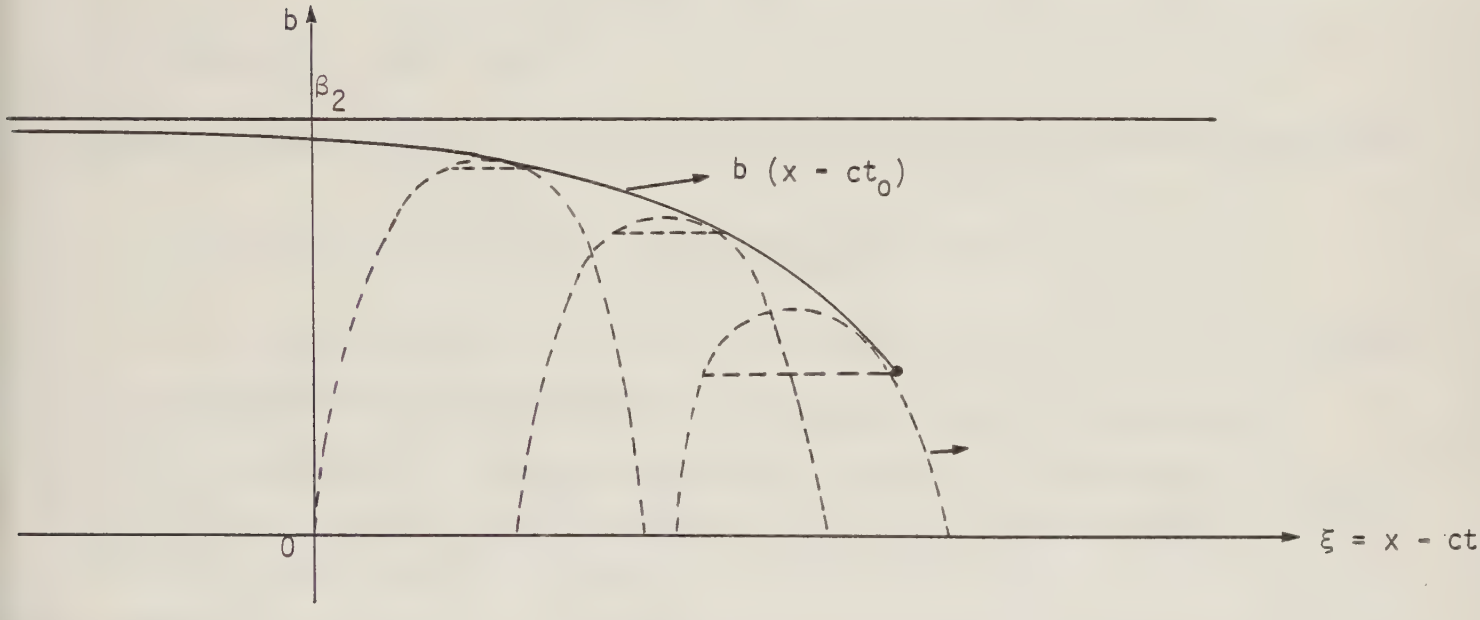


FIGURE 3.11.

A l'instant $c(t_o+t)$ le front est situé selon l'enveloppe convexe de ces différentes courbes. Il est donc impossible que le front s'arrête brutalement, ou même qu'il y ait un recollement avec une droite verticale de la branche (1) à la branche (2) de (a). Par conséquent, la seule possibilité pour c est d'être égale à la plus grande racine de : $h(c_o) = S_{max}$. Les solutions de (3.16) ont alors la forme suivante (Figure 3.12).

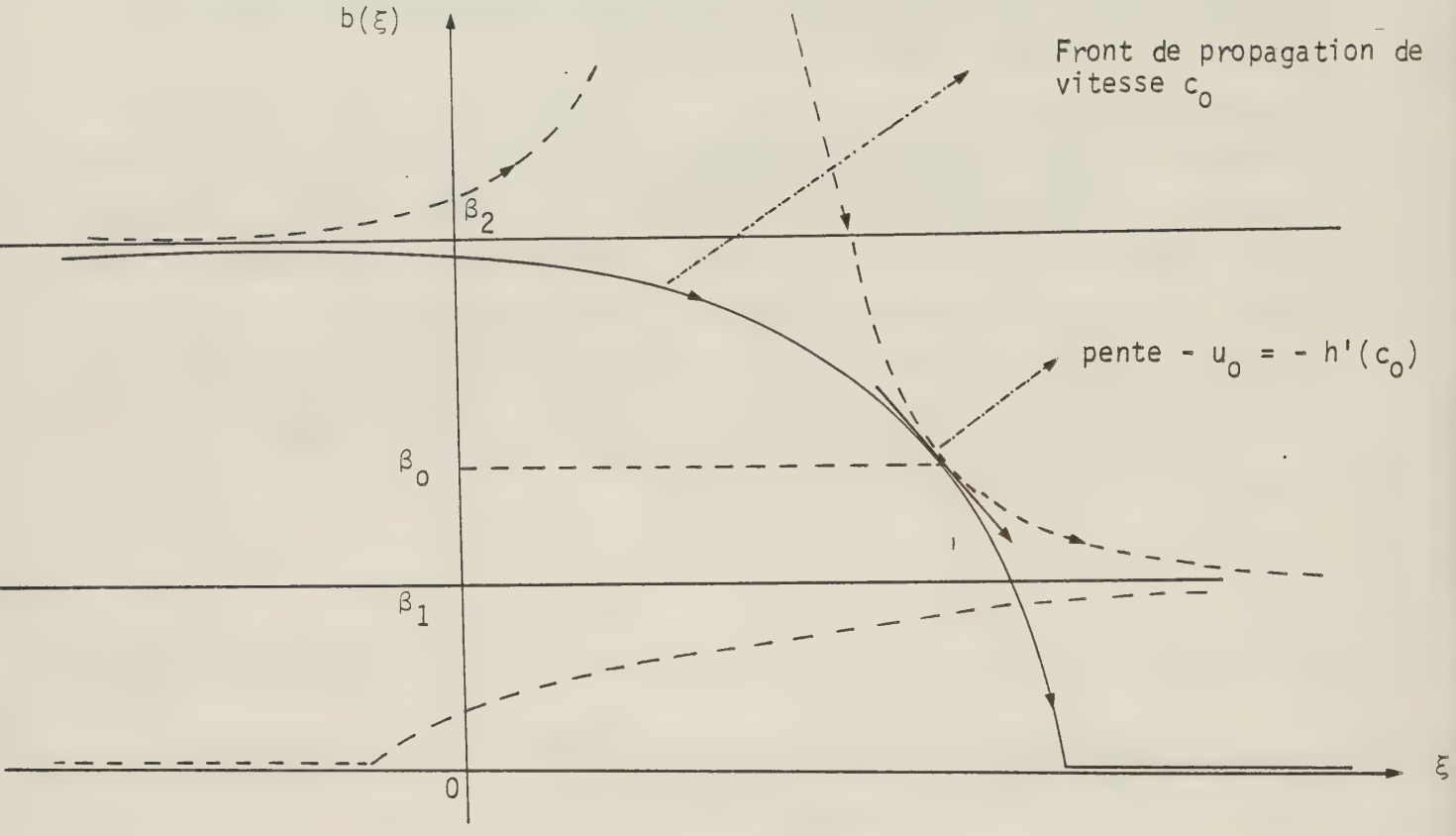


FIGURE 3.12.

La solution $b(\xi)$ de l'équation (3.16) associée à $c=c_o$ solution de (3.15) est définie sur $\mathbb{R}$, continue monotone décroissante et telle que :

$$\lim_{\xi \to -\infty} b(\xi) = \beta_2 \qquad ; \qquad b(\xi) \equiv 0 \text{ pour } \xi \geq \xi_o$$

La pente de b quand $b(\xi) = \beta_o$ est égale à : $-u_o = -h'(c_o)$. (Figure 3.12).

Nous conjecturons que $\beta(t,x)$ tend asymptotiquement soit précisément (cf. proposition 3.10) soit en forme (cf. proposition 3.11) vers la vague $b(x - c_o t)$. Le résultat : "$h(c_o) = S_{max}$" s'interprète en termes de chemins optimaux de développement : la zône du front de population correspondant à la densité β_o se suffit en quelque sorte à elle-même pour assurer sa propagation à la vitesse c_o (c'est une description analogue à celle des vagues tirées [41]). On obtiendrait de la même façon que l'extrémité gauche de la zône peuplée avance à la vitesse c'_o, plus petite racine de : $h(c) = S_{max}$.

3.2.4. - Résultats et discussion

Dans les simulations, la loi de dispersion est une loi de Bernouilli sur $\{0,1\}$, le temps final d'observation T est de l'ordre de 3000, ε est égal à 1.

En théorie, le paramètre ε est petit, destiné à tendre vers 0. La non-homogénéité du processus doit donc être telle qu'un nombre de générations de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$ doit s'écouler pour obtenir une variation significative de $\mu(t,x\ ;\ \cdot)$. Pour compenser ici le fait que $\varepsilon = 1$, $\mu(t,x\ ;\ \cdot) = \mu(\cdot)\ e^{S(\alpha(t,x))}$ ne doit pas varier trop vite. La fonction de saturation S est donc choisie, dans ces simulations, relativement "plate" (ce qui correspond, pour une fonction concave, à choisir S' petit).

La saturation S est donc telle que, avec les notations de 3.2.2. :

$$S(\beta) = \text{Log } f(e^{\beta}) \qquad \text{car} \quad \beta(t,x) = \text{Log } (\bar{n}\ (t,x)).$$

L'équation (3.13) s'écrit :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \text{Log } (p + q \exp\ (-\frac{\partial \beta}{\partial x}\ )) + S(\beta)$$

Les paramètres ayant varié au cours des simulations sont :

- la loi de dispersion $\mu(\cdot)$ par l'intermédiaire de p $(= P(X = 0))$, paramètre caractérisant la loi de Bernouilli sur $\{0,1\}$.

- la saturation S. (Figure 3.13.)
  La saturation de type (1) correspond à une fonction f parabole de sommet F_o, d'axe vertical telle que $f(0) = f(NS) = 0$

  La saturation de type (2) correspond à une fonction f parabole de sommet F_o, d'axe vertical, telle que $f(0) = 1$.

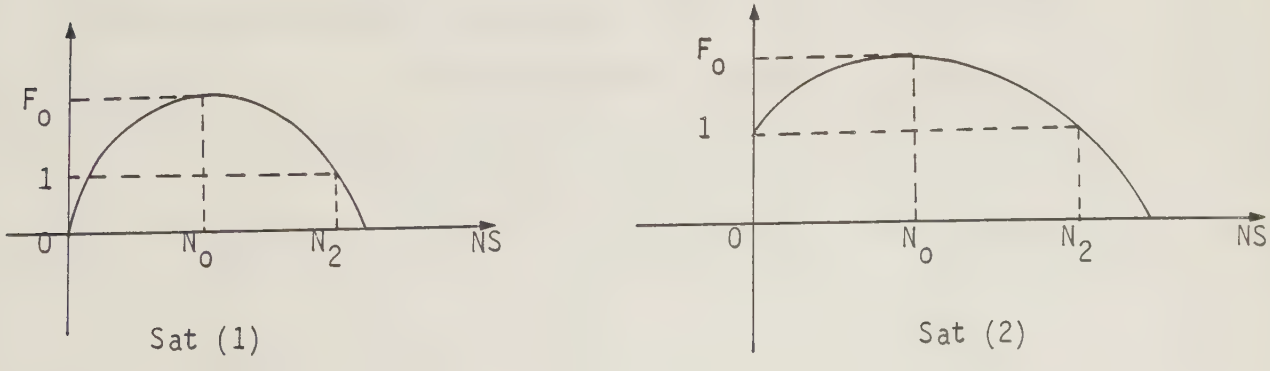


FIGURE 3.13.

Le voisinage de x a toujours été construit de la même façon : la fonction qui à $n(t,x)$ associe $\bar{n}(t,x)$ est :

$$\bar{n}(t,x) = 0.4\ n\ (t,x) + 0.2\ (n\ (t,x-1) + n(t,x+1)) + 0.1\ (n\ (t,x-2) + n(t,x+2)).$$

a) Résultats

Les résultats associés à chacune de ces simulations sont :

- la forme théorique de la propagation décrite par :
  - . vitesse c_o racine de $h(c_o) = \text{Log } F_o = S_{max}$
  - . taille de la population associée à cette vitesse $N_o = e^{\beta_o}$
  - . pente du front au niveau β_o : $-h'(c_o)$
  - . $N_2 = e^{\beta_2}$ niveau du front avant la décroissance.

- la forme observée de la propagation :
  - . vitesse (calculée pour le point le plus éloigné vers les $x>0$)
  - . taille de la population associée à cette vitesse
  - . pente du front
  - . N_2

- la forme corrigée de la propagation : elle est définie dans le paragraphe suivant et contient les termes utilisés dans le calcul du terme correctif :
  - . vitesse obtenue en tenant compte du terme correctif
  - . taille de la population associée à cette vitesse
  - . pente au niveau β_o du front corrigé
  - . $S''(\beta_o)$ où β_o est le point où S atteint son maximum
  - . pente u_1 (définie ultérieurement).

- la vitesse de l'approximation diffusion associée.

	FORME THEORIQUE				FORME CORRIGEE					FORME OBSERVEE				APPROXIMATION DIFFUSION
	Vitesse	taille pop. assoc.	pente u_o	$N_2=e^{\lambda_2}$	Vitesse	taille pop. assoc.	pente u_o	S"	u_1	Vitesse	taille pop. assoc.	pente u_o	N_2	Vitesse
p = 0.4 ;Sat. 1 F_o = 1.5 ;NS= 60	0.975	30	- 3.3	47.3	0.95	38.3	- 2.5	- 3	20.4	0.932	39.9		46	1.04
p = 0.4 ;Sat. 2 F_o = 1.5 ;NS= 82	0.975	30	- 3.3	60	0.97	36.8	- 3.07	- 0.66	20.4	0.972	35.5	-1.2	59	1.04
p = 0.5;Sat. 1 F_o=1.5; NS=200	0.915	100	- 2.38	157.7	0.77	147.5	- 1.2	- 3	8.16	0.86	133.3	-1.2	147	0.95
p = 0.5;Sat. 2 F_o=1.2 ;NS=172.5	0.79	50	- 1.3	100	0.745	78.8	- 1.07	- 0.33	3.09	0.76	74.5	-0.9	99	0.802
p =0.35;Sat. 2 F_o=1.05;NS=279	0.79	50	- 0.7	100	0.76	82.4	- 0.53	- 0.095	1.5	0.782	70	-0.52	102	0.799
p = 0.65;Sat.2 F_o= 1.2 ;NS=345	0.647	100	-1.225	200	0.58	165	- 0.94	- 0.33	2.61	0.600	155.7	-0.96	199	0.638
p = 0.4;Sat. 2 F_o=1.02,NS=407	0.696	100	- 0.42	200	0.67	168.6	- 0.3	- 0.04	0.871	0.687	142.4	-0.31	200	0.6975

Ces simulations faites avec des tailles de population assez faibles montrent qu'il y a propagation, que la forme de l'onde est proche de la solution précédemment exhibée, mais que la formule (3.15) en surestime toujours la vitesse. La décroissance est rapide au niveau du front, et pour les lieux x situés avant, la taille de la population $N(t,x)$ est très proche de $N_2 = e^{\beta_2}$. Seule la pente de la décroissance au niveau front est observable dans les simulations. L'explication de ce phénomène est que, à la pente théorique u_o en β_o de $b(\xi)$ est associée la pente $p = u_o e^{\beta_o}$ au point $N_o = e^{\beta_o}$. Cette pente est toujours forte puisque dans les simulations N_o varie de 30 à 100.

Dans les deux premiers exemples, l'approximation diffusion conduit à des vitesses aberrantes : c est supérieur à 1, alors que, de toute évidence, puisqu'un individu a des enfants à une distance de lui-même égale à 0 ou 1, la vitesse de propagation doit être inférieure à 1. Dans les autres exemples, l'approximation diffusion conduit à des vitesses encore supérieures à la vitesse théorique. Dans certains cas la variance empirique des tailles de population a été calculée en différents lieux. Lorsque ces lieux sont situés assez loin du front, cette variance reste stable et relativement faible, tandis qu'à proximité du front elle augmente rapidement et devient élevée quand les tailles de population décroissent jusqu'à 0 (c'est-à-dire sur le front même).

b - Introduction d'un terme correctif

Les résultats de ces simulations mettent en évidence la nécessité d'expliquer :

- la sous-estimation systématique de la vitesse de propagation par la formule théorique,
- l'observation de fortes variances au niveau du front.

En théorie, les individus situés dans la zône de densité β_o se suffisent en quelque sorte à eux-mêmes pour assurer la propagation à la vitesse c_o. Ils "tirent" le front de propagation (cf. Stockes [41]). Ici les individus situés dans la zône de densité β_o ont une position qui fluctue par rapport au front théorique et sont immergés dans des populations de densités sous optimales (pour ε petit ce phénomène est beaucoup plus significatif que les fluctuations de la forme du front).

Cette explication cohérente avec les résultats, fournit une méthode de calcul d'un terme correctif. La vitesse réelle du front, v, est telle que, en moyenne, le nombre des individus qui se maintiennent au niveau du front pendant un temps unité est égal à 1. En effet si cette espérance était supérieure (respectivement inférieure) à 1, la vitesse de propagation serait supérieure (resp. inférieure) à v. En conditionnant par le fait qu'un individu se maintienne au niveau du front pendant un temps unité (ce qui a une probabilité de l'ordre de $\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} h(v)\right]$), on obtient :

$$1 = E\ (\text{nombre d'individus / "se maintenir au niveau du front pdt tps 1"}) \times \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} h(v)\right)$$

Pour calculer cette espérance, on utilise un artifice de calcul qui consiste à remplacer $\mu(t,x\ ;\ \cdot)$ par $\mu(t,x\ ;\ \cdot) \times e^{-S_{max}}$, ce qui a pour effet de "remonter" toutes les transformées de Cramer ($h(t,x\ ;\ \cdot) \to h(t,x\ ;\ \cdot) + S_{max}$). Tout se passe comme si, dans un sens à préciser, il n'y avait plus qu'une seule particule pour laquelle serait calculée la probabilité qu'elle ne se soit pas éteinte pendant un temps unité, quand la loi ζ gouvernant l'extinction de cette particule dépend de sa trajectoire (X_s = position à l'instant s).

$$P\ (\zeta > t\ /\ \text{trajectoire avant } t) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (S(\alpha(s, X_s)) - S_{max})\, ds\right)$$

Un calcul analogue à celui utilisé pour la formule de Feymann-Kac pour des diffusions conduirait à :

$$E\ (\text{nbre de personnes / "se maintenir au front pdt tps 1"}) = e^{\frac{S_{max}}{\varepsilon}} \times E(1_{\{\text{particule en vie à 1}\}})$$

$$= E\left(\exp\int_0^1 (S\ (\alpha(t,X_t)) - S_{max})\ \frac{dt}{\varepsilon} \times 1\right) e^{\frac{S_{max}}{\varepsilon}}$$

$$= E\left(\exp\int_0^1 S\ (\alpha(t, X_t))\ \frac{dt}{\varepsilon}\right)$$

Soit $y(t,\omega)$ l'écart entre la trajectoire individuelle conditionnellement à la survie au niveau du front et le front se translatant à la vitesse v. Etant donné le conditionnement, $\alpha(t,X_t)$ est proche de β_o, et la trajectoire de

$\alpha(t,X_t)$ a pour pente $(-u_o\, y(t,\omega))$ au niveau β_o. Par conséquent, un développement de Taylor de $(\alpha-\alpha_o)$ à l'ordre 2 conduit à :

$$1 \simeq E\left(\exp \int_0^1 \left(S_{max} + \frac{1}{2} u_o^2\, S''(\beta_o)\, y^2(t,\omega)\right) \frac{dt}{\varepsilon}\right) e^{-\frac{1}{\varepsilon} h(v)} \qquad (3.17)$$

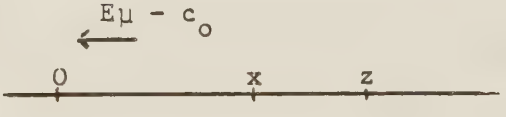
Admettons provisoirement que : $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 y^2(t,\omega)\, dt$ est petit avec ε .

L'équation (3.17) devient :

$$0 = S_{max} - h(v) + \frac{1}{2} u_o^2\, S''(\beta_o)\, E\left(\int_0^1 y^2(t,\omega)\, dt\right) \qquad (3.18)$$

Plaçons-nous dans un repère mobile de vitesse c_o. Pour le calcul de la loi de l'écart $y(t,\omega)$ nous distinguerons les individus situés en avant et en arrière du front. Pour les individus situés en avant du front, la loi de l'écart $y(t,\omega)$ conditionnellement à la survie au niveau du front s'obtient en calculant la loi, quand $\varepsilon \to 0$, d'une marche aléatoire avec drift négatif (égal à $E\mu - c_o$) contrainte à rester positive. En effet cette marche aléatoire dépend de ε de la façon suivante : à partir d'une marche aléatoire de référence, on définit $X^\varepsilon(\tau)$ processus sautant aux instants $\tau \in \varepsilon\, N$ et faisant des sauts suivant $\mu_x^\varepsilon(s) = \mu_x(\varepsilon\, s)$.
Soient x et z deux points dépendant de ε, tels que :

- $0 < x < z$
- $x = A(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}$ avec $A(\varepsilon) \to +\infty$ et $\frac{x^2}{\sqrt{\varepsilon}} \to 0$
- $z - x = o(\varepsilon)$



Il est alors possible d'obtenir un équivalent de la probabilité d'aller de x à z avant de passer par 0 en minimisant l'intégrale d'action des chemins allant de x à z (cf. [17]). On a :

$$-\varepsilon \operatorname{Log} P^\varepsilon(\text{aller de } x \text{ à } z \text{ avant de passer par } 0) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_x^z u_1\, dt$$

où u_1 représente la pente de la tangente à h issue de c_o (figure 3.14).

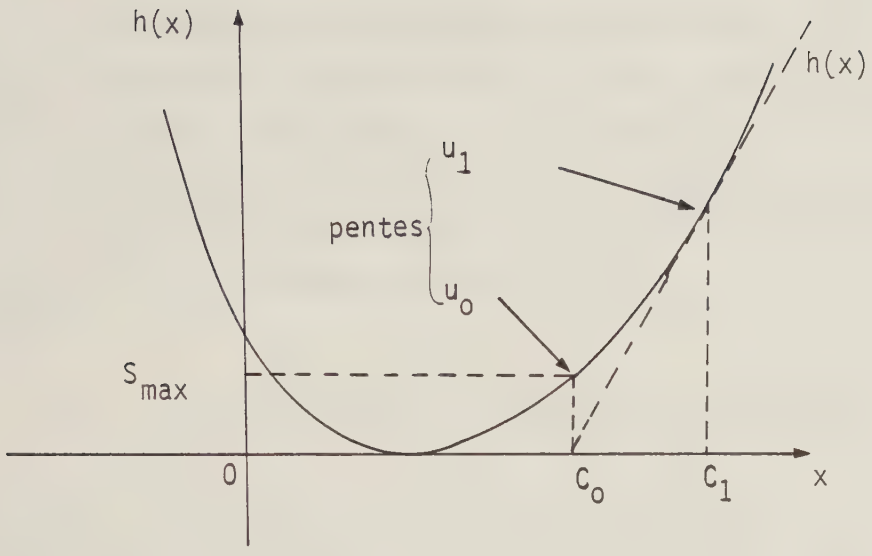


FIGURE 3.14.

Pour un individu situé en arrière du front, nous calculerons la probabilité d'aller de x à z (z<x) pour une marche aléatoire avec drift négatif contrainte à revenir en 0. On a :

$$P(\text{aller de } x \text{ à } z \,/\, \text{retour en } 0) = P(\text{aller de } x \text{ à } z) \times \frac{P(\text{partant de } x, \text{ aller en } 0)}{P(\text{partant de } z, \text{ aller en } 0)}$$

La vitesse moyenne étant négative, la probabilité d'aller de x à z est bornée, tandis que les probabilités $P_x(0)$ et $P_z(0)$ sont infiniment petites. Le calcul de ces probabilités s'obtient comme précédemment [17] :

$$P(\text{partant de } x \text{ aller en } 0) = P_x(0) \sim \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} u_1 |x|\right)$$

$$P_z(0) \sim \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} |z|\right)$$

D'où P (aller de x à z / retour en 0) $\sim \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\ u_1\ |z-x|\right)$.

Finalement, on peut approximer l'écart $y(t,\omega)$ par une variable aléatoire symétrique de densité : $\frac{u_1}{2\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\ u_1\ |y|\right)$.

On déduit de ce résultat que :

$$E \int_0^1 y^2\ (t,\omega)\ dt \simeq 2\ \frac{\varepsilon^2}{u_1}\ .$$

Par conséquent nous proposons comme vitesse corrigée v la solution de l'équation :

$$h(v) = S_{max} + \varepsilon^2\ S''\ (\beta_o)\ \left(\frac{u_o}{u_1}\right)^2\ . \qquad (3.19)$$

Bien que les ordres de grandeur des différentes approximations demandent à être précisés, cette équation (3.19) permet d'obtenir une borne inférieure de la vitesse de propagation qui est satisfaisante (elle figure dans le tableau des résultats sous le titre "forme corrigée").

APPENDICE 1 - DEMONSTRATION DU LEMME

Ce lemme sera démontré dans une situation plus générale. En effet, il suffit de supposer que la matrice $\mathcal{M}$ a des moments d'ordre 1, 2, 3 finis pour que le résultat soit vrai. Nous utiliserons dans la démonstration des transformées de Fourier-Stieljes et non des transformées de Laplace qui exigent des hypothèses plus fortes (ce qui est cependant le cadre de notre problème).

NOTATIONS

Soit $\mathcal{F}(t)$ la matrice des transformées de Fourier des μ_{jk} :

$$(\mathcal{F}(t))_{jk} = f_{jk}(t) = \int e^{itx} \mu_{jk}(dx)$$

Le terme générique de $[\mathcal{F}(t)]^n$ sera noté $f^n_{jk}(t)$. M moment d'ordre 0 est la matrice des masses (m_{jk}), M_1, M_2, M_3 moments d'ordre 1, 2, 3 de $\mathcal{M}$:

$$(M_r)_{jk} = \int x^r \mu_{jk}(dx) \qquad r = 1, 2, 3.$$

$\mathcal{M}^{*n}$ désigne le produit de convolution de matrices de mesures.

$$\begin{cases} (\mathcal{M}^{*n})_{jk} = \sum_{r=1}^{R} (\mathcal{M}^{*(n-1)})_{jr} * \mu_{rk} \\ \mathcal{M}^{*1} = \mathcal{M} \end{cases}$$

La matrice M, positivement régulière possède une valeur propre simple, $\lambda(0) = 1$, de module strictement supérieur à tous les autres (théorème de Frobénius). Au voisinage de 0, $\mathcal{F}(t)$ a le développement de Taylor :

$$(1) \qquad \mathcal{F}(t) = M + it\,M_1 + \frac{1}{2}(it)^2 M_2 + \frac{(it)^3}{6} M_3 + o(|t|^3) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il existe un voisinage V de 0 et une unique fonction $\lambda(t)$ telle que $\lambda(t)$ soit la valeur propre de $\mathcal{F}(t)$ de module supérieur à tous les autres $(\lambda(0)=1)$.

En effet, le polynôme caractéristique de $\mathcal{F}(t)$ est $\pi(t,\lambda) = \det(\lambda I - \mathcal{F}(t))$. De (1), on déduit que π est C^3 dans un voisinage de $(0,1)$. La valeur $\lambda=1$ est un zéro simple de $\pi(0,\lambda)$, d'où $\frac{\partial \pi}{\partial \lambda}(t,\lambda) \neq 0$ dans un voisinage de $(0,1)$. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème des fonctions implicites pour obtenir la fonction $\lambda(t)$ qui est C^3 dans ce voisinage de 0 [29].

Enoncé du Lemme :

Soit $\mathcal{T}$ une matrice (R, R) de mesures μ_{jk} stochastique. On suppose :

H1 : $\forall (j,k)$ le support de μ_{jk} ne constitue pas un réseau,

H2 : $\exists \nu \geq 1$ tel que $\int |f_{jk}(t)|^{\nu} dt < \infty$ pour tout j, k

H3 : M matrice des masses est apériodique, irréductible, positivement régulière,

H4 : M_1, M_2, M_3 moments d'ordre 1, 2, 3 de $\mathcal{T}$ sont finis,

H5 : $\mathcal{T}$ est non dégénérée $(\lambda''(0) \neq 0)$.

Alors la fonction $G^n_{jk}(x)$ définie par :

$$G^n_{jk}(x) = \int_{-\infty}^{x} (\mathcal{T}^{*n})_{jk} (na + \sigma\sqrt{n}\, du)$$

vérifie :

$$G^n_{jk}(x) - v_k(0) \left[\Phi(x) + \frac{\mu_3(1-x^2)}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

avec :

$a = -i\lambda'(0)$, $\sigma^2 = -[\text{Log } \lambda(t)]''(0)$, $\mu_3 = i\,[\text{Log } \lambda(t)]'''(0)$,

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$, $v_k(0)$ est la $k^{\text{ième}}$ coordonnée du vecteur propre à gauche de M associé à $\lambda=1$. Le terme $o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, uniformément en x et plus vite que $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Remarque : Avec les notations de 1.2.1.b), la fonction $G^n_{jk}(x)$ représente la probabilité : $P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x,\ R_n = j \,/\, R_o = i\right)$ associée au processus décrit dans 1.2.1.b).

Démonstration :

Nous démontrerons ce lemme dans le cas où chacune des μ_{jk} admet une densité. La méthode suivie sera proche de celle de Feller ([19], XVI,2), car cette démonstration fait apparaître de façon claire le développement de $(\mathcal{F}(t))^n$. Par un argument classique de régularisation, le cas de distributions en est déduit.

Nous utiliserons le résultat classique de théorie des matrices [40] : pour tout t appartenant au voisinage de 0 défini précédemment, si $u(t)$ et $v(t)$ sont des vecteurs propres à droite et à gauche de $\mathcal{F}(t)$ associé à $\lambda(t)$, $\mathcal{F}(t)$ vérifie :

$$\mathcal{F}(t)^n = \lambda(t)^n Q_1(t) + Q_{2,n}(t)$$

où $Q_1(t) = u(t)^t v(t)$. Il existe $c < \infty$ tel que le terme générateur $q_{ij}^{|n|}$ de $Q_{2,n}$ vérifie :

$$q_{ij}^{(n)} \leq c\, \rho_o^n \qquad 1 \leq i,j \leq R \quad \text{et} \quad |\rho_o| < |\lambda(t)|.$$

Nous admettons la continuité et la dérivabilité des vecteurs $u(t)$ et $v(t)$ dans ce voisinage de 0. Par conséquent, quand $t \to 0$, $u(t)$ approchera le vecteur $\mathbb{1}$ et $v(t)$ le vecteur $v(0)$.

Soit $g_{jk}^n(x)$ la densité de $G_{jk}^n(x)$. L'énoncé du lemme devient :

$$(2) \qquad g_{jk}^n(x) - \left[\phi(x) + \frac{\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(x^3 - 3x)\,\phi(x)\right] v_k(0) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Nous utiliserons la technique classique d'inversion de Fourier : si $D_{jk}^n(t)$ est la transformée de Fourier du premier membre de (2), il suffit de montrer que::

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |D_{jk}^n(t)|\, dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

avec

$$D_{jk}^n(t) = e^{-\frac{iat\sqrt{n}}{\sigma}} f_{jk}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - v_k(0)\left(1 + \frac{\mu_3}{6\,\sigma^3\sqrt{n}}(it)^3\right) e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Cette intégrale tend vers 0 pour deux raisons : si $\delta>0$ arbitrairement petit mais fixé, la contribution des intervalles $|t| > \sigma\delta\sqrt{n}$ tend vers 0 à cause de H2. Pour l'intervalle $|t| \leq \sigma\delta\sqrt{n}$, le terme D^n_{jk} est petit en raison du développement de $f^n_{jk}(t)$ au voisinage de 0.

$$f^n_{jk}(t) = u_j(t) \times v_k(t)\ \lambda(t)^n + c(t)\ \rho(t)^n \quad \text{avec} \quad |\rho(t)| < |\lambda(t)|$$

- Calcul de $\int_{|t| > \sigma\delta\sqrt{n}} |D^n_{jk}(t)|\, dt$

Pour tout (j,k), μ_{jk} possède une densité, par conséquent $f_{jk}(t)$ est telle que : $|f_{jk}(t)| < m_{jk}$ pour $t\neq 0$ et $f_{jk}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$. Il existe donc un nombre $q_\delta < 1$ tel que :

$$|f_{jk}(t)| < m_{jk}\ q_\delta \qquad \text{pour} \quad |t| > \delta$$

Par récurrence, on obtient :

$$|f^n_{jk}(t)| \leq \sum_\ell |f^{n-1}_{j\ell}(t)|\ |f_{\ell k}(t)| \leq q^n_\delta \sup_{j,k} (m_{j,k}) \leq q^n_\delta$$

La contribution des intervalles $|t| > \sigma\delta\sqrt{n}$ est donc :

$$\int_{|t|>\sigma\delta\sqrt{n}} |D^n_{jk}(t)|dt < q^{n-\nu}_\delta \sup_{j,k} \int |f_{jk}(t)|^\nu + v_k(0) \int e^{-\frac{1}{2}t^2} \left[1+\left|\frac{\mu_3 t^3}{\sigma^3}\right|\right] dt$$

Ceci tend vers 0 plus rapidement qu'une puissance de $\frac{1}{n}$.

- Calcul de $\int_{|t| < \sigma\delta\sqrt{n}} |D^n_{jk}(t)|\, dt$

Posons $\psi^n_{jk}(t) = \frac{1}{n} \log \left[e^{-iatn} f^n_{jk}(t)\right] - \operatorname{Log}(u_j(t)\ v_k(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$. Le terme $D^n_{jk}(t)$ s'écrit alors :

$$D^n_{jk}(t) = \left[\frac{u_j\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) v_k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{v_k(0)}\ e^{n\psi^n_{jk}(t)} - 1 - \frac{\mu_3 (it)^3}{6\sigma^3\sqrt{n}} \right] e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

On a l'inégalité :

$$|D^n_{jk}(t)| \le e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\left| e^{n\psi^n_{jk}(t)} - 1 - \frac{\mu_3 (it)^3}{6\sigma^3 \sqrt{n}} \right| + \left| 1 - \frac{u_j(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) v_k(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})}{v_k(0)} \right| \left| e^{n\psi^n_{jk}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})} \right| \right]$$

$$\le (A_n(t) + B_n(t)).$$

Pour estimer $A_n(t)$ nous utiliserons l'inégalité :

$$(3) \quad |e^{\alpha} - 1 - \beta| \le (|\alpha - \beta| + \frac{1}{2}\beta^2)\, e^{\gamma} \qquad \gamma = \max(|\alpha|, |\beta|).$$

La fonction ψ^n_{jk} est 3 fois différentiable, On a :

$$\psi^n_{jk}(t) = -iat + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \text{Log}\, \lambda(t) + \frac{1}{n} \text{Log}\, (1 + c(t) [\frac{\rho(t)}{\lambda(t)}]^n).$$

Le terme d'erreur que constitue $\text{Log}\, (1 + c(t) (\frac{\rho(t)}{\lambda(t)})^n) = E_n(t)$ tend vers 0 plus vite que toute puissance de $\frac{1}{n}$ si t est dans un voisinage de 0 puisque $|\frac{\rho(t)}{\lambda(t)}| < 1$.

Par conséquent, les dérivées successives de ψ^n_{jk} vérifient :

$$\psi^n_{jk}(0) = 0(\rho_1^n) \qquad |\rho_1| < 1$$

$$(\psi^n_{jk})'(0) = 0(\rho_2^{n-1}) \qquad |\rho_2| < 1$$

$$(\psi^n_{jk})''(0) = 0(\rho_3^{n-2}) \qquad |\rho_3| < 1$$

$$(\psi^n_{jk})'''(t) = \frac{d^3}{dt^3} (\text{Log}\, \lambda(t)) + 0(\rho_4^{n-3}) \qquad |\rho_4| < 1$$

En utilisant le développement de Taylor à l'ordre 3 de ψ^n_{jk}, on obtient, si t est borné :

$$\{\psi^n_{jk}(t) - \frac{1}{6}(it)^3 \mu_3| \le K \rho^{n-3} + [\sup_{V_0} |\psi'''(t) - i^3 \mu_3|]\, t^3.$$

ψ''' est continue au voisinage de 0 ; il existe δ tel que pour $|t| < \delta$, ψ''' varie de moins de $\varepsilon\sigma^3$.

Choisissons δ suffisamment petit pour que :

$$|\psi^n_{jk}(t)| < \frac{1}{4}\sigma^2 t^2 \qquad |\frac{1}{6}\mu_3 (it)^3| < \frac{1}{4}\sigma^2 t^2.$$

Avec ce choix de δ, on voit, en utilisant (3) que :

$$|\alpha-\beta| = |n\,\psi^n_{jk}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) - \frac{(it)^3\,\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}| \leq Kn\,\rho^{n-3} + \varepsilon\,\frac{\sigma^3 t^3}{\sqrt{n}}\ .$$

Le terme $A_n(t)$ à intégrer est donc tel que :

$$A_n(t) \leq e^{-\frac{1}{4}t^2}\,(Kn\,\rho^{n-3} + \varepsilon\,\frac{\sigma^3 t^3}{\sqrt{n}} + \frac{\mu_3^2}{72n}\,t^6)\ .$$

ε étant arbitrairement petit $\int_{|t|<\sigma\delta\sqrt{n}} A_n(t)\,dt$ est un $o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Pour $B_n(t)$, sur l'intervalle considéré $|e^{n\psi^n_{jk}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})}|$ est borné. La fonction $u_j(t)\,v_k(t)$ est C^1 dans un voisinage de 0.
On choisit δ suffisamment petit pour que :

$$|1 - \frac{u_j(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})\,v_k(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})}{v_k(0)}| \leq \frac{\varepsilon_2\,t}{\sigma\sqrt{n}} \qquad \text{pour} \qquad |t| < \delta$$

Alors on a :

$$\int_{|t|<\sigma\delta\sqrt{n}} |B_n(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon_2}{\sigma\sqrt{n}} \int e^{-\frac{1}{2}t^2}\,t\,dt.$$

ε_2 est arbitraire, on a finalement le résultat recherché.

APPENDICE 2 : PROGRAMME FORTRAN DE LA SIMULATION

```
      DIMENSION N(3000),NAUX(3000)
      DIMENSION T(12,60),MOY(60),ISIG(60)
      REAL M,MS
      DO 20 I=1,3000
      N(I)=0
      NAUX(I)=0
20    CONTINUE
      M=1.02
      A=0.9
      B1=200.
      B3=B1*(1.+SQRT(M/(M-1.)))/2.
      P=0.4
      IPORT=2
      Q=0.5
      IG=1
      ID=50
      IFT=50
      IFIN=3000
      ILIEU=1
      ITPS=10
      QUOT=(1.-Q)/(1.+Q-2.*Q**(IPORT+1))
      L=0
      DO 1 I=IG,ID
      N(I)=IFT
1     CONTINUE
      IY=0
50    L=L+1
      IF (L.GT.IFIN) GO TO 1000
      CK=FLOAT(L)/100.-FLOAT(L/100)
      IF (CK.GT.1.E-6) GO TO 33
      CALL CHECK
33    DO 2 I=IG,ID
      K=N(I)
      IF(K.EQ.0) GO TO 2
      J1=MAX0(I-IPORT,1)
      J2=MIN0(I+IPORT,IFIN)
      DST=0.
      DO 40 II=J1,J2
      DST=DST+FLOAT(N(II))*QUOT*Q**(IABS(II-I))
40    CONTINUE
      IF (DST.GT.B3) GO TO 2
      SAT=1.+4.*(M-1.)*DST*(B1-DST)/B1**2
      P0=1.-A*SAT
      DO 4 J=1,K
      Z=URAND(IY)
      X=Z-P0
      IF(X.LT.0.) GO TO 4
      X=X-P*(2.-2.*P0-SAT)
      IF(X.LT.0.) GO TO 6
      X=X-(1.-P)*(2.-2.*P0-SAT)
      IF(X.LT.0.) GO TO 7
      X=X-(SAT-1.+P0)*P**2
      IF(X.LT.0.) GO TO 8
      X=X-2*P*(1.-P)*(SAT-1.+P0)
      IF(X.LT.0) GO TO 9
      NAUX(I+1)=NAUX(I+1)+2
      GO TO 4
6     NAUX(I)=NAUX(I)+1
      GO TO 4
7     NAUX(I+1)=NAUX(I+1)+1
      GO TO 4
8     NAUX(I)=NAUX(I)+2
      GO TO 4
9     NAUX(I)=NAUX(I)+1
      NAUX(I+1)=NAUX(I+1)+1
```

```
      4       CONTINUE
      2       CONTINUE
              DO 10 I=IG,ID+1
              N(I)=NAUX(I)
              NAUX(I)=0
       10      CONTINUE
               IG1=IG
               ID1=ID+1
               DO 12 I=IG,ID+1
               IF (N(I).GT.0) GO TO 15
               IG1=IG1+1
       12      CONTINUE
       15      DO 13 I=IG,ID+1
               IF (N(ID+IG+1-I).GT.0) GO TO 14
               ID1=ID1-1
      13         CONTINUE
      14      IF(IG1.GT.ID1) GO TO 999

              IG=IG1
              ID=ID1
              VD=FLOAT(ID)/FLOAT(L)
              VG=FLOAT(IG)/FLOAT(L)
               IDEP=ID-ILIEU*59
               RT=FLOAT(L)/FLOAT(ITPS)-FLOAT(L/ITPS)
               K1=L-((L-1)/10)*10
               IP=MAX0(1,IDEP)
               DO 31 J=1,60
               K2=(J-1)*ILIEU+IP
               T(K1,J)=N(K2)
       31      CONTINUE
               IF (K1.LT.10) GO TO 50
               DO 38 J=1,60
               T(11,J)=0.
               T(12,J)=0.
               DO 34 I=1,10
               T(11,J)=T(11,J)+T(I,J)
       34      CONTINUE
               T(11,J)=T(11,J)/10.
               DO 35 I=1,10
               T(12,J)=T(12,J)+(T(I,J)-T(11,J))**2
       35      CONTINUE
               T(12,J)=SQRT(T(12,J)/9.)
               MOY(J)=INT(T(11,J))
               IF((T(11,J)-MOY(J)).GT.0.5) MOY(J)=MOY(J)+1
               ISIG(J)=INT(T(12,J))
               IF ((T(12,J)-ISIG(J)).GT.0.5) ISIG(J)=ISIG(J)+1
       38      CONTINUE
                 DO 36 I=1,10
               DO 37 J=1,60
               T(I,J)=0.
       37        CONTINUE
       36       CONTINUE
               WRITE (6,100) L,IG,ID,VG,VD
               IP1=IP+29*ILIEU
               IP2=IP1+ILIEU
               WRITE(6,201) (N(I),I=IP,IP1,ILIEU)
               WRITE(6,200) (MOY(I),I=1,30)
               WRITE(6,200) (ISIG(I),I=1,30)
               WRITE(6,201) (N(I),I=IP2,ID,ILIEU)
               WRITE(6,200)(MOY(I),I=31,60)
               WRITE(6,200) (ISIG(I),I=31,60)
      100       FORMAT (///3(3X,I6),2(3X,F8.4))
      200       FORMAT (30(I3,1X))
      201        FORMAT (/30(I3,1X))
               GO TO 50
      999        WRITE(6,300)
      300       FORMAT(6X,10HEXTINCTION)
               WRITE(6,100) L,IG,ID,VG,VD
      1000     STOP
               END
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.G. ARONSON, H.F. WEINBERGER, Non linear diffusion in population genetics, combustion and nerve propagation. Lecture Notes in Math. Vol. 446, Springer (1975).

[2] K.B. ATHREYA, P. NEY, Branching processes. Springer Verlag, Berlin (1972).

[3] R. AZENCOTT, Cours de l'Ecole d'été de Saint-Flour. Lecture Notes in Math. Vol. 774, Springer (1978).

[4] R. AZENCOTT, G. RUGET, Mélanges d'équations différentielles et grands écarts à la loi des grands nombres. Zeits. für Wahr. Vol. 38 (1977), p. 1-54.

[5] P. BARTFAI, Connections between the convex analysis and the theory of large deviations. Preprint of the Math. Inst. of Hung. Acad. of Sciences (1977).

[6] P. BARTFAI, On the multivariate Chernoff theorem. Preprint of the Math. Inst. of Hung. Acad. of Sciences (1977).

[7] R.N. BHATTACHARAYA, R. RANGA RAO, Normal approximation and asymptotical expansion. Wiley, New-York (1976).

[8] J.D. BIGGINS, The first-and last-birth problems for a multitype age-dependent branching process. Adv. Appl. Prob. Vol. 8 (1976), p. 446-459.

[9] J.D. BIGGINS, Chernoff's theorem in the branching random walk. Journ. of Appl. Prob. Vol 14 (1977), p. 630-636.

[10] J.D. BIGGINS, The asymptotic shape of the branching random walk. Adv. in Appl. Prob. Vol. 10 (1978), p. 62-84.

[11] J.D. BIGGINS, Growth rates in the branching random walk. Zeits. für Wahr. Vol. 48 (1979), p. 17-34.

[12] J.D. BIGGINS, Spatial spread in branching processes, in "Biological growth and spread", Lecture Notes in Biomathematics n° 38, Springer (1979).

[13] J.D. BIGGINS, Private communication, (1980).

[14] M.D. BRAMSON, Maximal displacement of branching brownian motion. Comm. on Pure and Appl. Math. Vol. 21 (1978), p. 531-581.

[15] J. BRETAGNOLLE, Formule de Chernoff pour les lois empiriques de variables à valeurs dans des espaces généraux. Astérisque Vol. 68 (1979).

[16] E.D. CONWAY, E. HOPF, Hamilton's theory and generalized solutions of the Hamilton-Jacobi Equation. Journ. of Math. and Mechan. Vol. 13, n° 6, (1964), p. 939-986.

[17] M. COTTRELL, J.C. FORT, G. MALGOUYRES, Evènements rares pour l'étude de certains algorithmes stochastiques. Prépublication, Orsay, (1980).

[18] M. DUFLO, Formule de Chernoff pour des chaînes de Markov. Astérisque Vol. 68, (1979).

[19] W. FELLER, An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. II, Second Edition, Wiley (1971).

[20] P.C. FIFE, Mathematical aspects of reacting and diffusing systems. Lecture Notes in Biomath. Vol. 28, Springer (1980).

[21] P.C. FIFE, J.B. MAC LEOD, The approach of solutions of non linear diffusion equations to travelling front solutions. Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 81 (1975), p. 1075-1078.

[22] R.A. FISHER, The wave of advance of advantageous genes. Ann. of Eugen. Vol. 7 (1937), p. 355-369.

[23] R.G. GALLAGER, Information Theory and Reliable Communication. Wiley (1968).

[24] A. HARTEN, J.M. HYMAN, P.D. LAX, On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. Comm. on Pure and Appl. Math. Vol. 29 (1976), p. 297-322.

[25] P. JAGERS, Branching processes with biological applications. Wiley (1975).

[26] O. KALLENBERG, Random measures. Academic Press (1976).

[27] Y.I. KANEL, On the stabilization of solutions of the Cauchy problem for the equations arising in the theory of combustion. Math. Sbornik. Vol. 59 (1962), p. 245-288.

[28] N. KAPLAN, S. ASMUSSEN, Branching random walks II. Stochastic Proc. and their Appl. Vol. 4 (1976), p. 15-31.

[29] J. KEILSON, D.M.G. WISHART, A central limit theorem for processes defined on a finite Markov chain. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 60 (1964), p.547-567.

[30] A.N. KOLMOGOROFF, I.G. PETROWSKY, N.S. PISCOUNOFF, Etude de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. Bull Univ. Etat Moscou. Vol. 6, (1937), p. 1-25.

[31] C. LAREDO, A. ROUAULT, Une généralisation du paramètre de Malthus pour les processus de Crump-Mode-Jagers. Note au C.R.A.S. (1981).

[32] C. LAREDO, A.ROUAULT, Grandes déviations, dynamique de populations et phénomènes malthusiens. (1981), à paraître.

[33] C. LAREDO, A.ROUAULT, Les processus de branchement spatiaux multitypes dans l'asymptotique des grandes déviations. (1981), à paraître.

[34] H.P. MAC KEAN, Application of brownian motion to the equation of Kolmogoroff Petrowsky-Piscounoff. Comm. on Pure and Appl. Math. Vol. 28 (1975), p. 323-331.

[35] H.D. MILLER, A convexity property in the theory of random variables defined on a finite Markov chain. Ann. Math. Statis. Vol. 32 (1961), p. 1260-1270.